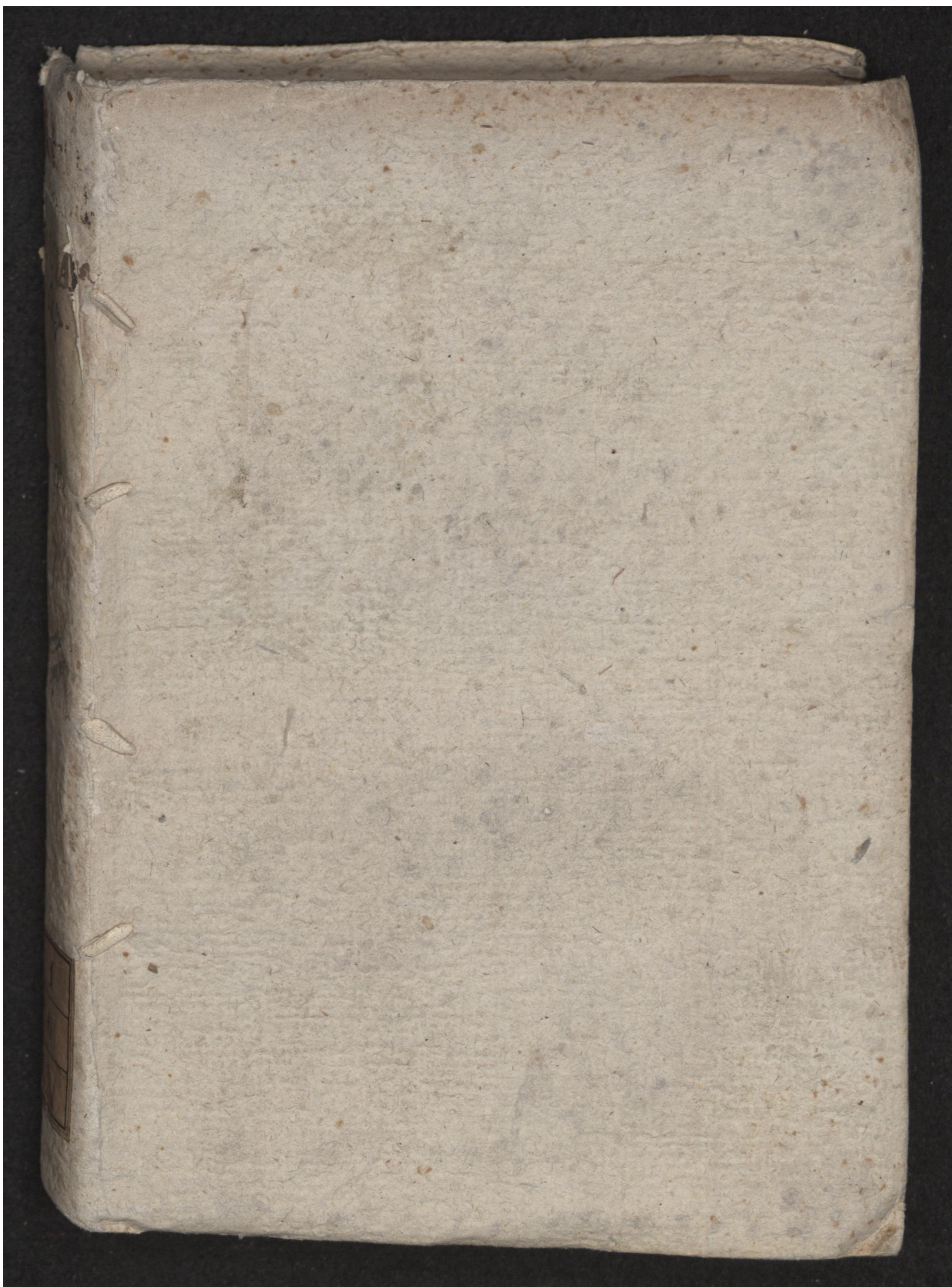
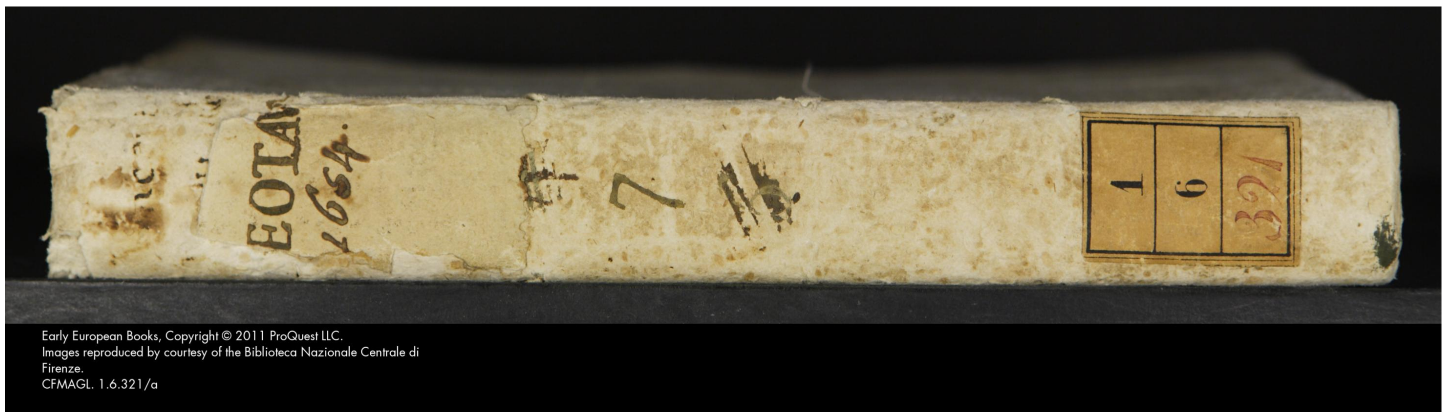
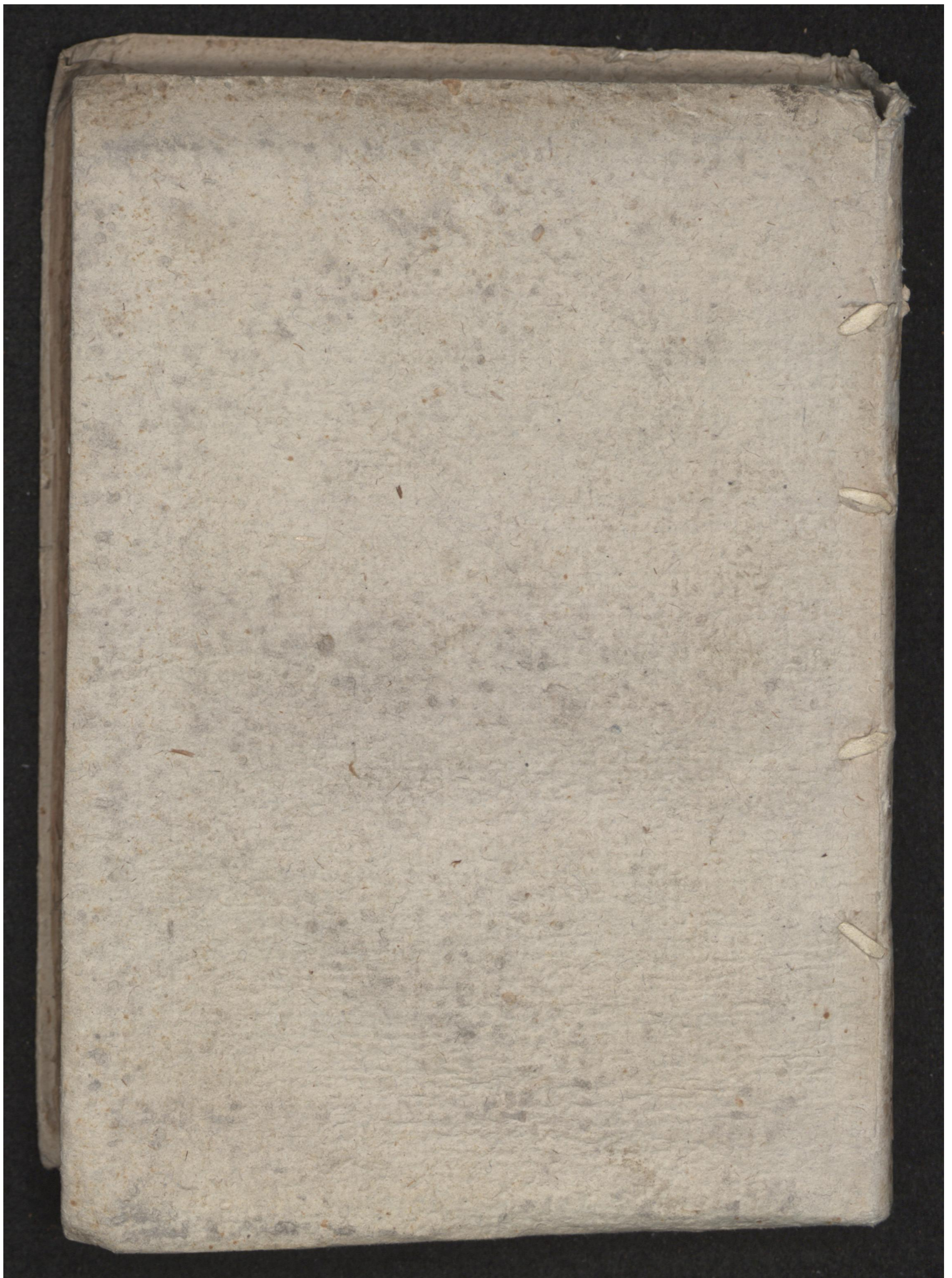



EOTA
1654.
7
1
6
321











PARS SECVNDA.

IN QVA EXAMEN INSTITVITVR Circuli Quadraturæ quam R. P. Greg. a Sancto Vincentio Exposuit.

LIBER PRIMVS.

RATIONVM ACCVRATA TRACTATIO.

PROP. I. DEFINIT.

Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam secundum quatitatem habitudo.

ITA Euclides lib. 5. definit. 3. Rationem definit. quam eius Commētatores fusè, vt materiæ exigit grauitas, exponunt: & varias eius diuisiones instituunt. Quibus omnibus missis, cum obuia sint. Vnum moneo, quod sæpius

occurrit: nempe, illam è duabus quantitatibus, inter quas ratio dicitur intercedere, vocari Terminum Antecedentem, quæ ad alteram refertur: hanc verò ad quam refertur prior, dici Terminum Consequentem.

PROP. II. DEFINITIO.

Singularis cuiusuis Rationis denominator est ratio similis terminis constans in eâ Rationis specie, notissimis.

EXPOSITIO.

Magnum est, vbi de Rationibus agitur ad eas pertinentium denominatorum momentum: vt paulò accuratioris de iis tractationis minime nos tædere debeat: cùm præsertim eorum mentio frequentissima imposterùm futura sit: víxque alius præter hunc Geometram clarissimum occurrat, qui caput istud præ cæteris in Geometria celebre vel attigerit, vel ad rem mentémque meam satis aptè tradiderit. Itaque

Cùm duo sint Quantitatis diuersa genera, continuæ scilicet & discretæ: cuius vtriusque Quantitates inter se comparatæ Rationem generare aptæ sint; magnum tamen est, vt ex dicendis patebit, inter vtrasque discrimen quoad euidentiam & faciliorem cognitionem. Hîc enim, quemadmodum & aliâs semper, discreta Quantitas præ continuâ longe se notiorem & apertiorem præbet quoad nos, quamuis quoad se pari fere gradu incedant ambæ. Quare è re maximè futurum est; si priùs, quæ ad Denominatores Rationum

quanti

quantitatis diſcretæ pertinent, expoſuero: eáque deinceps ad continuam quantitatem applicauero.

PARS PRIMA:

Denominatores diſcretæ Quantitatis.

Vt res tota tractetur planius: exemplum propono, quod verſemus. Conferatur numerus A ad numerum B: quis Rationis huius, Antecedentis A ad Conſequentem B futurus eſt denominator? Reſpondeo eum eſſe Rationem quamdam ſimilem Rationi A B, ſiue eiuſdem ſpeciei cum Ratione A B; quæ omnium Rationum ſimilium Rationi A B, ſiue omnium Rationum illius ſpeciei notiſſima per ſe ſit, vt habet allata Propoſitio.

A	45	C	5
B	9	D	1

Quod ſi iam quæratur quænam ſit illa Ratio, & quomodo determinetur. Reſpondeo iam aliud aliquid quæri præter definitionis ſenſum, quæ terminorum expoſitione ſolâ contenta eſt, eámque quæſtionem Theoremate, aut etiam Problemate ſoluendam eſſe: eam tamen adhunc locum maximè pertinere: nec poſſe definitionem allatam clarè percipi, niſi accedat eius ſolutio; quam propterea nunc proſequor. &

Aſſero primò notiſſimam illam Rationem, quæ ſit denominator Rationis A B; eam eſſe, quæ ſimilis cùm ſit Rationi A B, vnitatem habet pro termino Conſequente, qualis eſt in ſchemate Ratio C D. Aſſertionis ratio clara eſt. Cùm enim (quod nemo non admittet) quò maior eſt numerus, ſiue ex pluribus vnitatibus compoſitis coaleſcit,

eò ægriùs concipiatur, mentem ſcilicet maiori illa multitudine obruente; eò autem faciliùs, quò paucioribus conſtat vnitatibus: quis eo numero notior poteſt exhiberi, quem ſola componit vnitas. Accedit quòd ipſa ſit omnium numerorum radix, & elementum in quod reſoluantur omnes; ipſa verò in nullum aliud ſimplicius diſſolui queat: adeò vt fixa & immutata ſemper ſit non in vniûs tantùm ſpeciei Ratione ſed in omnibus; atque ita Rationum menſura ſit ab Antecedente Rationum ſingularum determinata ad talem vel talem Rationis ſpeciem: quâ quæ vniuerſalior Rationum menſura dari poſſit? Tertiò nec ſui ipſius multiplicatione, vel in ſe, vel in alium numerum, vel ſe, vel alium numerum auget: nec diuiſione ſui ipſius vel alterius numeri, per ſe ipſam, minuit. Sit etiam cuiuſuis ſpeciei numerus; erit planus, erit ſolidus, erit radix tam plani, quàm ſolidi abſque omni ſui mutatione: quæ fixa & ſtata habitudo in omnibus; maxime propria eſt conditio mēſuræ ac determinationis Rationum ſingularum, qua natus eſt fungi earum proprius denominator. Atque hæ omnes affectiones Rationis illius, cuius Conſequens eſt vnitas, non tantùm conuenit Rationibus maioris inæqualitatis; ſed etiam Rationibus quibuſcumque inæqualitatis minoris. Imò etiam Rationibus irrationalibus; quarum ſcilicet termini ſunt irrationales. Quod exemplis iuuerit illuſtrare. Vis denominatorem Rationis minoris inæqualitatis terminorum E,F, Antecedentis ſcilicet 3 ad Conſequentem

E	3	G	$\frac{1}{5}$
F	15	H	1

ſequentem 15. hoc eſt, Rationem ſimilem Rationi EF: cuius Conſequens ſit vnitas? hanc exhibeo G $\frac{3}{15}$ vel (in minimis) G $\frac{1}{5}$ ad H. 1. Quo denominatore oſtenditur Ratio EF eſſe ſubquintupla, quemadmodum Antecedens G eſt ſubquintuplus Conſequentis H, qui eſt vnitas. Pari modo Proponitur irrationalis Ratio Antecedentis E Γ 10. ad Γ 3 Conſequentem: Denominator, qui eſt Ratio ſimilis Rationi EF, & cuius Conſequens ſit vnitas; erit G H: quo declaratur ita ſe habere Antecedentem E ad Conſequentẽ F; vt ſe habet Antecedens G $\frac{\Gamma 10}{\Gamma 3}$ ad 1 Conſequentem. Quod verum ex eo patet: quod idẽ numerus naſcatur ex multiplicatione primi E in quartũ H; & ſecũdi F in tertium G. Atque ita in cæteris omnibus Rationibus fieri cenſendum eſt.

E	Γ 10	G $\frac{\Gamma 10}{\Gamma 3}$
F	Γ 3	H. 1.

Aſſero ſecundò exprimi non ſolere, nec opus eſſe, vnitatem illam: quæ in denominatoribus eſt Conſequens. Verbi gratiâ. Denominator Rationis AB, eſt C 5 ad D 1. Dico Conſequentem D reticeri poſſe commodè, & ita fieri ſolere Cum enim C ſit numerus atque adeò ex vnitatibus tot vel tot compoſitus; quarum multitudinem ipſe numerus deſignat, hoc eſt, vnitas numerum illum per ipſum numerum metitur ſatis indicat per ſe, quam habeat habitudinem ad vnitatem; etſi vnitas non exprimatur; ita vt terminus C abſolutus & minimè ad vllum Conſequentem relatus videatur quanquam reuera abſolutus non ſit re

A	45	C	5
B	9	D.	1.

attentiùs perpensâ, diceturque Ratio A B, quintupla, à Denominatore C 5 quasi absolutè sumpto. Nec dispar est ratio; quando Ratio est minoris inæqualitatis, atque adeò Antecedens denominatoris, minor est Consequente, qui est vnitas. Imo nec in irrationalibus vllum discrimen reperire est. Quare in vniuersum vera est assertio.

Assero tertiò. Denominatorem Rationis alicuius non malè sæpiùs dici Rationis quantitatem. Ostendit enim quanta sit Ratio Antecedentis ad Consequentem collati. Quæ Ratio siue habitudo, ens est relatiuum suscipiens maius & minus; provt eius fundamentum, quod est quantum, maius vel minus suscipit: & reuera, cum, vt dictum est, denominator sit Ratio similis, siue æqualis Rationi, quam denominat, esto apertior sit, & euidentior, optimè dici potest Rationis denominatæ quantitas; cùm eadem sit etiam quantitas Rationis, quam continet denominator.

Assero quartò. Ratio, quam continet denominator, alio vlteriori denominatore caret; sed sibi ipsi & denominator est & mensura. Ratio patet ex superioribus, denominator enim debet esse Ratio omnium Rationum eiusdem speciei notissima, paucissimis terminis constans, &c. Quæ in eadem Rationis specie vnica est, præterea si denominatoris denominator daretur; eodem iure tertius huius secundi dari deberet denominator.

Assero quintò. Si denominator Rationis alicuius ducatur in eius Consequentem, producitur Rationis Antecedens. Hoc est principium quartum à Geometra statutum lib. 8.

lib.8. quod tamen medio non caret, quo demonstretur; atque adeo minime per se notum videatur. Ita

A 8	C 2		
B 4	D 1		

ergo demonstrabitur sit Rationis A.B Denominator CD. Ita se habet C ad D, vt A ad B. Ergo C multiplicans B, eundem numerum producit, quem producit D multiplicans A. Sed D multiplicans A producit A (est enim D vnitas.) Ergo etiam Denominator C (etiam si absolutus censeatur) multiplicans Consequentem B, producit Antecedentem A.

Assero sextò. Si Antecedens A diuidatur per Consequentem B, produci Denominatorem C. Patet ex assertione præcedente: quod enim componit multiplicatio, idem resoluit diuisio. Atque hinc patet non malè ab aliquibus Denominatorem definiri per hanc proprietatem vt Denominator sit productus, numerus ex diuiso Antecedente Rationis per eius Consequentem.

PARS SECVNDA.

Denominatores continuæ quantitatis.

Assero primò. Vt in discretâ quantitate, ita etiam in continua dari Denominatorem Rationis cuiuslibet solitariè & absque omni relatione ad aliam Rationem sumptæ. Non abs re hic primùm quæro an detur in hoc genere quantitatis, Rationis vnius singularis proprius Denominator. Cum id summus Geometra noster apertè neget lib.8. Defin.2. Vbi semel atque iterum ait. *Si Ratio, quæ in numeris exprimi nequeat, solitariè sumatur Denominatorem*

eius Geometricè exhiberi non posse. Quis enim non hæreat, inquit, *& meritò percellatur, si ab eo postuletur Denominator Rationis A ad B.* Et Rationem affert: quia nulla linea, verbi gratiâ, E habet quidquam peculiare plus quàm alia quælibet; quo possit explicare habitudinem Antecedentis A ad Consequentem B. Atque ita alia atque alia foret Ratio A B, provt aliæ atque aliæ lineæ in Denominatorem illius assumerentur.

A —— —	E —
B —	
C ———	F —
D —	

Quod si (eius sunt verba) *binæ datæ fuerint Rationes, vt A B & C D, assignari poterunt singularum Denominatores E & F; qui demonstrent, qualis inter Rationes ipsas Proportio intercedat.* Habes tanti Geometræ sententiam, à qua me ægrè quidē auellunt, auellunt tamen momēti maximi Rationes; quibus Assertionis meæ veritas stabilitur. Nam primò. Cum in Ratione singulari duorum terminorum discretæ Quantitatis, nemine discrepante, exhiberi possit Denominator: quid affertur discriminis, quod in continuâ aliter sentire compellat? Deinde cum ipse Geometra citato loco, etiam in continuâ, cum termini Rationis singularis Arithmeticè exprimi possunt, Denominatores agnoscat: Cur in reliquis eiusdem naturæ terminis, licet sint incommensurabiles, idem non admittatur. Quid si attendatur, quod superiùs ostendi Assert. 1. Rationes irrationales discretæ quantitatis (quibus quælibet Rationes irrationales quantitatis continuæ exprimi possunt) proprio Denominatore gaudere? nunquid eodem iure

priuari

priuari poſſunt? Denique hoc ipſum non obſcurè ex Euclide lib. 6. Def. 5. eiuſque Interpretibus omnibus colligitur. Vbi compoſitionem Rationis definiens ait *Rationem ex rationibus componi: cum Rationum Quantitates in ſe ductæ aliquam effecerint Rationem.* Vbi per Rationum Quantitates, volunt omnes ab eo intelligi, Rationum Denominatores. Nec dubium, quin de continua quantitate eam compoſitionem intelligat, cum totus hic liber ſextus, quem auſpicatur, ad id genus quantitatis pertineat. Neque, opinor, cenſebit quiſpiam, Rationum componentium, verbi gratiâ, in ſuperiori ſchemate, Rationum A B, C D, quantitates ſiue Denominatores eſſe E & F, vt expoſuit Geometra: qui in ſe ducti Rationem generent compoſitam ex Rationibus AB & CD. Nam compoſita Ratio duobus terminis conſtare debet Antecedente & Conſequente: At quantitates E & F in ſe ductæ vnicum abſolutum terminum producunt, rectangulum ſcilicet vnicum abſque omni alio termino ad quem referatur, & cum quo Rationem aliquam conſtituat. Denique hæc Aſſertio mea ex eo etiam confirmabitur; cum oſtendam quíſnam ſit Rationis cuiuſlibet Denominator.

Aſſero ſecundò Rationum A B & C D, ſuperioris ſchematis, Denominatores E & F, dici nullo modo poſſe. Nam ſi *Ratio E F exprimat Proportionem*, vt ait Author, *Rationis AB ad Rationem CD*, hoc eſt, ſit verus & proprius Denominator proportionis Rationum A B & C D: quomodo quantitas E vt dicatur Denominator

Rationis A B, exprimit habitudinem termini A ad terminum B; vel quantitas F, termini C ad terminum D. Longe enim alia eſt habitudo Rationum A B, C D inter ſe, quam exprimit Ratio E F, ab habitudine termini A ad terminum B; vel termini C ad terminum D. Quod vnico Argumento euidenter expono. Sint Rationes AB & C D ſimiles in quauis ſpecie Rationis, vt duplæ. erunt E & F æquales, vt ſcilicet Ratione EF oſtendatur Proportio Rationum A B, C D ſimilium ſiue æqualium: & dicetur E ex mente Geometræ Denominator Rationis A B duplæ: ſicut F duplæ Rationis C D. At verò ſi ſupponantur iterùm A ad B, & C ad C Rationem habere quadruplam: erunt perinde, vt ante, E & F æquales, eò quod oſtendant Rationes A B, C D æquales, nempe quadruplæ. Ergo rurſus tam E qùam F, quæ erant Rationis AB, & Rationis CD duplarum Denominatores. Sunt etiam ſine vlla mutatione Denominatores Rationum quadruplarum; & aliarum omnium ſimilium. Quod longè abeſt ab officio Denominatoris: qui ſingulis Rationibus, ſingularis & proprius & ab omni alio diuerſus aſſignatur. Vnde patet Rationes A B, C D aut carere omni Denominatore, aut alium ſingulis aſſignandum eſſe, quam E & F; aut certè hos impropriè & contra Denominatoris notionem & officium Rationibus illis applicari.

Aſſero tertiò. Cuiuſuis Rationis ſingularis & ſolitariè ſumptæ verum & proprium dari Denominatorem; cúmque in omnibus Quantitatis ſpeciebus corpore, ſuperficie, & lineâ,

eſſe

esse Rationem denominatæ Rationi similem duabus rectis lineis expressam. Nam Denominator debet quoad se notissimus esse, atque adeò simplicissimus. Ergo in primâ specie Quantitatis, lineâ scilicet quæ vnicâ dimensione constat, constituendus est. Quis enim non videat speciem secundam Quantitatis, superficiem scilicet, minùs esse per se notam, & difficilius obseruari Rationem inter duas superficies ob duplicem illam dimensionem, longitudinem nimirum ac latitudinem, quibus omnis superficies constat, & magis composita ac implicata efficitur. Multò minus ad hoc munus apta est tertia quantitatis species, ob triplicem; quam inuoluit dimensionem. Deinde cum ea sit Rationum proprietas, vt binæ vel plures Rationes Rationis aliquam compositionem efficere natæ sint; quæ compositio peragitur ductis inter se Rationum Denominatoribus, siue Quantitatibus, vt Definit. 5. lib. 6. docet Eucl. quanam ratione, si Denominatores forent superficies, absolui posset illa multiplicatio? quænam noua species quantitatis ex ea multiplicatione oriretur? si enim superficies in lineam ducatur, corpus gignitur, hoc est, vltima & maxime composita species quantitatis. At superficies in superficiem, & multò minùs corpus in corpus duci nullatenùs concipi possit, nec huiusmodi multiplicationis quisquam meminit aliquando. Quare certum esto, omnes omnium Rationum Denominatores ad primam speciem quantitatis pertinere: & quidem ita, vt non quælibet lineæ eo munere fungi aptæ sint; sed, vt fert Assertio mea, lineæ tantùm rectæ illud

ſibi vindicent, vt pote ſimpliciſſimæ, notiſſimæ, regulariſſimæ.

Dixi præterea duas illas lineas rectas, quarum Ratio eſt Denominator Rationis alicuius; debere vtraſque exprimi. In hoc enim differt quantitas continua à diſcreta: ſiquidem in diſcretâ Conſequens eſt ſemper vnitas, id eſt, certa & determinata pars Antecedentis, ab ipſo Antecedente connotata, vt ſupra docui. At in continuâ quantitate, cum diuiſibilis ſit in infinitum, nulláque parte primâ & elementari conſtet, in quam vltimò reſoluatur: non poteſt denominator conſtitui, niſi Conſequens, alioqui incertus futurus, exprimatur. Nec mirum ſi hæc differentia inter continuam & diſcretam Quantitatem minus accuratè obſeruata, minúſque cautè perpenſa connotatio illa Denominatoris cuiuſlibet ad vnitatem, quam in diſcreta quantitate quilibet Denominator includit; peritiſſimo cuique Geometræ negotium creare, eúmque percellere queat: dum Denominatorem Rationum diſcretæ quantitatis, vnicum numerum abſolutum cenſebit; & in eum modum cēſebit etiam Denominatorem Rationum continuæ quantitatis vnicâ lineâ conſtare debere: quæ inepta planè eſt Denominatoris officio fungendi. adeò vt maluerit doctiſſimus Geometra, ita ſentiens; negare vnius Rationis ſolitariè ſumptæ Denominatorem dari; quàm talem admittere, qui vnica abſolutâ lineâ deſignaretur.

Aſſero quartò Rationem inter duas rectas lineas, non alio

alio Denominatore explicari posse, sed sibi Rationem illam, Denominatorem esse. Similis est hæc Assertio Assertioni quartæ superioris ad discretam quantitatem pertinentis. In eo tamen hæc ab illa differt: quod in hac duæ quælibet lineæ rectæ Rationem constituentes, alia Ratione simili non egeant, quæ Denominatoris officio fungatur; quæcunque tandem lineæ Rationem constituant: in illa verò Ratio quælibet duorum numerorũ; cuius Consequens non sit vnitas, Denominatorem sortitur; similem scilicet aliam Rationem ad eos terminos deductam, vt Consequens sit vnitas, vt superiùs priori parte explicatum est. Diuersitatis huius causa oritur ex diuersâ quantitatis discretæ & continuæ natura. Numeri enim alij aliis explicatiores & notiores dantur prout alij aliis maiori vnitatum multitudine constant, omniumque notissimus, est vnitas quam, quæ Ratio pro Consequente obtinuerit; omnium Rationum similium notissima est, eóque nomine, omnium Denominator. At verò Rationes omnes similes duarum linearum, æque notæ exhibentur; nec vna ab alia differt; nisi ratione maioris aut minoris quantitatis terminorum: nec vna aliqua Ratio exhiberi potest omnium vltima, quam sibi reliquæ similes in Denominatorem assumant. Quo fit, vt singulæ Rationes alio Denominatore à se diuerso careant, quemadmodum in discreta quantitate vltima illa Ratio, cuius Consequens est vnitas, omni alio præter se, Denominatore caret.

Scholium.

Scholium.

Hic obiter iuuerit obſeruare ſenſum definitionis illius 5. Libri ſexti Euclidis ex dictis apertiſſimum fieri; & quomodo cum ipſo apprimè concordet Interpretum ſententia. Aſſerit Eucl. def. citatâ, Rationem dici ex Rationibus componi: cum Rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint Rationem. Vbi per Rationum Quantitates, intelligi volunt Interpretes Rationum Denominatores. At, ſi mens Euclidis attentiùs perpendatur; nihil aliud ab eo intelligi colligetur, per Rationum Quantitates; quàm ipſaſmet Quantitates Rationes illas conſtituentes. Attendatur enim Propoſitio 23. lib. 6. vbi aſſeritur Æquiangulorum Parallelogrammorum inter ſe Rationem habere eam, quæ ex lateribus componitur. Cui perſimilis eſt Propoſitio 5. lib. 8. ad diſcretam Quantitatem pertinens. Sic enim habetur. Plani numeri Rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Ita vt Euclides hoc in vtroque loco ipſaſmet quantitates Rationem conſtituentes, non alias eorum loco ſubſtitutas, ſeu Denominatores, inter ſe multiplicari velit ad Rationem componendam. Optime tamen Euclidis menti conſentit Interpretum expoſitio, ſi quæ hic de Denominatoribus expoſui, attendantur; oſtendi enim proximâ Aſſertione quartâ in continua quantitate, ipſas quantitates Rationum, earum Denominatores dici debere. Priore verò parte expoſitionis, Aſſertione 1. docui

deno

Denominatorem Rationis inter terminos diſcretæ quantitatis, eſſe aliam Rationem ſimilem, ſed notiorem; cuius nimirum Conſequens ſit vnitas, ſiue explicetur, ſiue connotetur tantùm. At ſimilitudo illa Rationum ſiue æqualitas; non mutatur; licet mutetur terminorum quantitas, eâdem inter eos ſeruata habitudine vt liberè latera ipſa, ſiue termini Rationum perinde adhiberi poſſint ad Rationum Compoſitionem, ac ipſi Denominatores; qui hoc tantùm nomine vſurpari ſolent: quod notiores ſint quoad nos, quàm alij maiores Rationum termini.

PROP. III. DEFINIT.

Proportio eſt duarum Rationum ſimilitudo.

EXPOSITIO.

Hæc eſt Definitio 4. libri 5. Euclidis & omnium Geometrarum, vno excepto Geometra noſtro: qui Proportionum terminos anguſtiores quàm par ſit, primus obſeruauit, vt Prop. 4. ſequente exponam. Hæc verò ita intelligi debet, vt duæ Rationes; quarum habitudo, proportio dicitur, ſint ſimiles. Vt ſi Ratio A B ſit dupla; dupla etiam ſit Ratio C D ad quam refertur A B alioqui ſi forent diſſimiles, vt ſi A B ratio dupla foret; foret verò Ratio C D tripla,

A	8	C	6
B	4	D	3

aut alterius cuiuſcumque ſpeciei, à Ratione A B diuerſæ; nulla inter eas duas Rationes proportio agnoſceretur à veteribus Geometris: neque dicerentur quatuor

illæ quantitates A ad B, & C ad D proportionales, sed disproportionales.

PROP. IV. DEFIN.

Proportio est duarum quarumlibet Rationum habitudo.

EXPOSITIO.

Definitio hæc proportionis, quæ apud Geometram habetur sub initium libri 8, longè est præcedente vniuersalior. Hæc siquidem duas quaslibet Rationes siue similes siue dissimiles, inter se comparat; & habitudinem illam, quam inter se obseruant; proportionem vocat. Vt si Ratio A ad B fuerit dupla, & Ratio C D existat tripla: habitudo illa harum duarum Rationum, proportio eodem iure dicetur; ac si inter eas similitudo intercederet, vt vult communis definitio, hactenus admissa, quam Prop. 3. exposui. Et

A	8	C	9
B	4	D	3

verò Ratio A B dupla ad Rationem C D triplam collata; relationem quandam habet, siue habitudinem secundum quantitatem; quæ habitudo, proportionis nomine æquè donari debet; ac si binæ Rationes similes forent: dicetur tamen proportio inæqualitatis, vel maioris vel minoris, vt in Rationibus simplicibus, quædam est Ratio æqualitatis, cum termini sunt æquales; quædam inæqualitatis, cum Antecedens Consequente maior aut minor est. Est enim proportio duarum quarumuis Rationum Ratio: quæ Rationum Ratio siue habitudo, Proportio siue Analogia dicitur, vt distinguatur

tur ab aliis Rationibus,quæ inter quantitates absolutas tantùm reperiuntur.

Obseruandum porrò est quod Euclides lib.5. Definit.9. asserit, nimirum proportionem tribus terminis paucissimis constare, quod contingit, cum vnus terminus duorum vices sustinet, dum prioris Rationis est Consequens, at idem Antecedens est posterioris. Sed tunc quatuor etiam sunt termini formales; licet materiales tres tantùm numerentur.

Denique eiusdem speciei semper erit proportio; quamuis vna Rationum ad vnam speciem quantitatis pertineat verbi gratiâ, ad solida, altera verò ad lineas vel numeros aut tempora, &c. Quantitas enim materiale tantùm est Rationum.

PROP. V. DEFINIT.

Proportionis, quæ inter duas Rationes tam continuæ quam discretæ quantitatis, intercedit, denominator, sunt duæ quantitates: quæ habitudine suâ clarè demonstrant: qualis sit inter ipsas Rationes habitudo, siue qualis sit earum Rationum Ratio, quam vocauimus Proportionem Prop.4.præcedente.

EXPOSITIO.

Nullam de Denominatore Proportionum inter duas Rationes, mentionem fecere hactenus Geometræ. Nec immeritò. Cùm enim illam tantùm Proportionem agnoscerent: quæ inter duas Rationes similes siue æquales reperitur; nullo opus erat Denominatore: hoc enim ipso quòd duæ Rationes æquales suppone-

bantur; earum habitudo inter ſe, ſiue æqualitas exhibebatur. At poſtquam eximius Geometra Rationes etiam diſſimiles inter ſe cōparare docuit; quia diſſimilitudo illa habitudines infinitas inter Rationes inuehit, non minùs quàm inæqualitas inter quantitates inæquales, infinitas Rationes: vt harum Rationum Denominator ad eas explicandas neceſſarius fuit, ita etiam Denominator aſſignādus fuit; qui habitudinem, quam binæ quælibet Rationes habēt inter ſe, clarè exhiberet. Longe autem alius eſt hic Rationum duarum inter ſe collatarum Denominator, à Denominatore Rationum ſingularum, qui habitudinem tantùm inter duas quantitates earum deſignat; cum prioris officium ſit habitudinem ipſarum Rationum repreſentare: in quo, quantùm & quomodo à Geometra noſtro diſſentiam perpende ex dictis Prop. 2.

Vt rem totam, quæ quamuis plana, quia tamen noua non poteſt non pati aliquam difficultatem, oculis ſubiiciam apertiſſime, exemplũ huiuſmodi eſto in continua quantitate: in qua Denominatore exhibeo Proportionis duarum Rationum A B, & C D. Sic autem habetur (quanquam huius loci non ſit, eum inueſtigare, vbi tantùm definio, ſed maioris lucis gratiâ, id fieri nihil vetat) reducatur Conſequens D, Rationis C D, ad lineam F æqualem Conſequenti B Rationis A B. Fiat ſcilicet, vt D ad C, ita B ad E & ponatur F æqualis lineæ B. Erit ratio E F æqualis Rationi C D, & ad eam Ratio A B eandem

proportionem habebit; quàm priùs habebat ad CD. Quia verò, vt demõſtrabo Prop.7. Ratio AB ad Rationem EF (eò quod æqualis ſit vtriuſque Conſequens) ita ſe habet vt Antecedẽs A ad Antecedentẽ E. Erunt duæ lineæ A & E Denominator proportionis Rationũ AB, EF ſiue AB, CD. Sicut & aliæ duæ lineæ quæcunque, quæ habeant eandem Rationẽ quam habent A & E. In diſcretâ verò quantitate Rationũ AB, CD Denominatores ſint EF & GH. Cum Rationes EF & AB; ſicut & GH & CD, ſint ſimiles; eadem erit proportio Rationis EF ad Rationem GH; quæ eſt Rationis AB ad Rationẽ CD. Sed Rationũ

A	8	E	2
B	4	F	1
G	6	G	3
D	2	H	1

EF & GH, Conſequentes F & H ſunt æquales. Ergo ita ſe habent vt Antecedentes E & G. Ratio ergo E G eſt Denominator proportionis Rationum EF, GH; ſiue AB, CD. Atque ex his ſatis conſtat quis ſit Denominator Proportionis inter duas Rationes iuxta definitionẽ.

PROP. VI. DEFINIT.

Proportionalitas eſt proportionum Ratio.

Quemadmodum ea ſola proportio eſt hactenus agnita; quam duarum Rationum ſimilitudo, ſiue æqualitas generat, omiſſa omni alia Rationum diſſimilium comparatione: Ita etiam nulla eſt agnita proportionalitas, niſi quæ ex proportionum ſimilium comparatione enaſcitur: reiectis tanquam inutilibus Relationibus omnibus, quas diſſimiles proportiones habere poſſunt adinuicem. Verùm cum ſine Geometriæ damno, in terminos tam anguſtos redigi nequeat proportionis

facultas; ita nec proportionalitatis. Quare tam proportionalitatis hic, quàm superiùs proportionis definitio absolutior constituenda fuit. Ita vt proportio competat Rationibus omnibus absque omni similitudinis vel dissimilitudinis distinctione, & proportionalitas pariter omnes Proportiones, è quibus resultat, tam similes quam dissimiles complectatur; vt ex terminis allatæ definitionis colligitur, quæ proportionalitatem vniuersaliter vocat Rationem proportionum, hoc est, habitudinem, quam duæ proportiones, è duabus iam Rationibus inter se comparatis enatæ, habent ad inuicem. Ex quibus sequitur ad proportionalitatem generandam octo concurrere simplices terminos, siue quantitates, Ratio siquidem cum respectiua sit, iam duos poscit terminos: Proportio verò cum sit Rationum Ratio, duas Rationes, è quibus emanet, supponit. Atque adeo terminos quatuor. Denique proportionalitas, quia est duarum proportionum Ratio, necessariò octo terminos habere debet simplices: ex quibus quatuor Rationes, & deinceps duæ proportiones, ac tandem vnica proportionalitas constituatur. Res clara clarior euadet allato exemplo, & hoc schemate expressa. Sit ergo Ratio quædam Antecedentis A 8, ad Consequentem B 4. (Terminos affero discretæ quantitatis, vt apertiores; eosdem suppone quantitatis esse continuæ) altera verò Ratio quæcumque sit C 6, ad D 2, sit earum Rationum Denominator I 2, K 3. Qui exprimat habitudinem Rationis prioris A ad B, ad posteriorem C ad D: erit Ratio I 2, ad K 3, proportio duarum illarum Rationum, vt ex dictis de propor-

tione

Rationes.	Proportiones.		Proportionalitas
A	8	I — 2	N — $\frac{2}{3}$
B	4		
C	6	K — 3	
D	2		
E	12	L — 4	O — $\frac{4}{5}$
F	3		
G	15	M — 5	
H	3		

tione conſtat, Rurſus duæ aliæ Rationes quæcumque proponantur Antecedentis E 12 ad Conſequentem F 3; & G 15, ad H 3, Quarum Denominator ſit L 4, ad M 5: erit Ratio terminorum L ad M proportio Rationum E ad F, & G ad H. Iam ſi duæ illæ Rationes I ad K, & L ad M, inter ſe comparentur, ope Denominatorum ad eas pertinentium, qui ſunt N $\frac{2}{3}$ & O $\frac{4}{5}$. Dicetur Ratio N ad O proportionalitas: eo quod ſit Ratio proportionum duarum adinuicem comparatarum: patet autem ad vnicam illam proportionalitatem conſtituendam neceſſarios eſſe terminos octo ſimplices tanquam illius primas Radices imo patet, ſi vlteriùs huiuſmodi Rationum Rationes multiplicare placeret, & duarum proportionalitatum Rationem expendere. Duplò plures futuros terminos ſimplices. Nam vtraque proportionalitas octo terminis conſtat. Verum vix vlla vnquam cogit neceſſitas vltra proportionalitatem iam expoſitam: vlteriorem perſcrutari.

Licet porrò ad conſtituendam proportionalitatem

neceſſarij

necessarij sint octo termini formales: quinque tamen minimum sufficere possunt. Sed tunc, exceptis primo & vltimo, singuli duorum munere funguntur, Consequentis scilicet ad terminum præcedentem, & Antecedentis ad subsequentem. Quemadmodum ad proportionem non semper quatuor termini formales adhibentur, quatuor licet virtuales concurrant. Neque tamen in hoc casu necessarium est, vt termini illi quinque sint in eadem Ratione continua, licet id fieri possit, & re vera ita supponebatur hactenus à Geometris, tum in Proportione tum Proportionalitate: sed satis est vt idem terminus bis sumatur, & duas Rationes quasi commune vinculum nectat, siue similes illæ sint, siue dissimiles. Quod si termini continue eandem seruent deinceps Rationem, celebres illas in Geometria progressiones generant: de quibus multi multa; sed vnus præ cæteris plurima & maximè eximia libro toto secundo de progressionibus noster Geometra.

PROP. VII. THEOR.

Duæ Rationes habentes communem terminum Consequentem: eam habent inter se Rationem, quam Antecedentes ipsi inter se.

Monitum.

Licet tum hæc, tum in posterum aliæ propositiones æquè quantitati continuæ ac discretæ conueniant: huic tamen soli, vt euidentiori, & ex cuius terminis ipsis tantùm propositis probatio deduci queat à posteriori, Ratiocinationum omnium seriem accommodabo.

dabo. Quas longè facilius futurum est, cuilibet maiorique cum luce ad quantitatem continuam transferre, si lubet. Præterquam quod, id mihi in hac animi gratiâ, susceptâ exercitatiuncula propositum est vt cuncta, quoad fieri poterit, numeris subiiciam, veritatis haud dubiè veris & euidentissimis indicibus.

Demonstratio.

A	8		D	2
		B 4		
C	12		E	3

Sint duæ Rationes A ad B & C ad B quarum Consequens est idem communis terminus B. Probandum est Rationem A ad B, ita se habere ad Rationem C ad B; vt illius Antecedens A se habet ad huius Antecedentem C. Sit enim Rationis A ad B, Denominator D; & Rationis C ad B, sit Denominator E (qui quomodo habeatur dictum est in annotationibus Prop.2.n.2.) Cum ergo hi Denominatores siue quantitates seipsis ostendant quænam Ratio inter ipsas Rationes A ad B, & C ad B intercedat. Hoc est, ita sit D ad E; vt Ratio A ad B, est ad Rationem C ad B ex Prop. 5. Sit autem D ad E, vt A Antecedens prioris Rationis ad C Antecedentem posterioris, vt statim declarabo, patet veritas propositionis. Quod verò sit D ad E, vt Antecedens A ad Antecedentem C constat ex annot.2.& 3. propositionis 5: nam Denominator D oritur ex diuisione Antecedentis A per Consequentem B: & Denominator E oritur ex diuisione Antecedentis C per eundem Consequentem B. Ergo reciproce D multiplicans, B restituet A: & E multiplicans B restituet C. Idem ergo B multiplicans

D* Denomi

Denominatores D & E, producit Antecedentes A & C. Qui per 17. lib. 7. Eucl. eădem habent Rationem, quam D & E, vnde ſequitur Rationes A B, C B, habere inter ſe eandem Rationem quam earum Antecedentes A & C inter ſe. Quare, duæ Rationes habentes, &c. Quod erat probandum.

PROP. VIII. THEOR.

Si duarum Rationum idem ſit Antecedens. Ita erit prima Ratio ad ſecundam : vt Conſequens ſecundus ad primum.

Demonſtratio.

D 4		B 4	D $\frac{1}{3}$		B 9
	A 16			A 3	
E 2		C 8	E $\frac{1}{2}$		C 6

Eſto A. Antecedens communis duarum Rationum A B, A C. (duo appoſui exempla, maioris vnum inæqualitatis, minoris alterum) Dico Rationem primam A B ad Rationem ſecundam A C ita ſe habere : vt ſe habet ſecundus Conſequens C, ad primum Conſequentem B. Sint earum Rationum Denominatores inuenti per annot. 2. Prop. 2. prioris quidem, D; poſterioris verò E. Erit ergo Ratio A B, ad Rationem A C; vt Denominator D ad Denominatorem E (hæc enim eſt Denominatorum natura; cum ipſarum ſint Rationum quantitates) deinde quia Denominator D habetur diuiſo Antecedente A per Conſequentem B, vt Prop. 2. annotaui, ſi Denominator D ducatur in Conſequentem B, producetur A Antecedens : qui idem

propter eandem Rationem producetur ducto E Denominatore in Consequentem secundum C. Cum igitur idem terminus A producatur ex ductu termini D in B; & termini E in C. Eadem erit Ratio primi termini D ad secundum E: quæ est tertij termini C ad quartum B, per 16 sexti, vel per 19. sept. Sed vt Denominator D ad Denominatorem E; ita est Ratio A B, ad Rationem A C. Ergo quoque Ratio A B, est ad Rationem A C; vt huius Consequens C, ad illius Consequentem B. Quare. Si duarum Rationum idem &c. Quod erat probandum.

PROP. IX. PROBL.

Duarum Rationum Consequentes Diuersos ad vnum vtrique communem reuocare.

Constructio.

	E 10		E 4
A 6	C 8	A 3	C 5
B 3	D 5	B 6	D 8

Sint duæ Rationes AB, CD, tam maioris quam minoris inæqualitatis, quarum Consequentes B & D diuersos, ad eundem reuocare oporteat. Fiat vt Consequens B ad Consequentem D: ita Antecedens A ad alium nempe E. Dico Rationem A B, reuocatam esse ad aliam æqualem E D, cuius Consequens est D, idem scilicet cum Consequente alterius Rationis C D.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione ita sit A ad E, vt B ad D:

D: erit Permutando vt A ad B; ita E ad D. Ita vt ſimiles ſint, ſiue æquales Rationes A B, ED. Ergo Ratio AB in aliam E D mutata eſt: cuius Conſequens eſt D, idem cum Conſequente alterius Rationis C D.

Pari modo Ratio C D in aliam mutari poſſet cuius Conſequens foret B; idem cum Conſequente Rationis A B. Si nimirum tribus terminis D, B, & C, quartus proportionalis reperiretur; qui eſſet Antecedens ad Conſequentem B, communem factum vtrique datæ Rationi.

Obſeruandum ſi in quantitate diſcreta: cuius in his maxima Ratio habetur apud me problema ſoluendum ſit; fieri non Ratio, vt Antecedens inuentus ſimplex non ſit numerus, ſed integer cum fracto, vel fractus tantùm; tunc porrò ſi terminos ſimplices ſtatuere lubeat; ducendus erit fractionis Denominator in terminos omnes datarum Rationũ qui quidem termini mutabuntur; immutatis tamen eorum Rationibus, quia numerus quilibet alios quoſlibet multiplicans, numeros gignit eaſdem Rationes inter ſe habentes; quas inter ſe habent numeri multiplicati per 15. lib. 5. Appono exemplum paulo ante propoſitum in quo reducenda ſit Ratio C D, ad aliam æqualem ita vt eius De-

A	3	C	5	A	3	C	$3\frac{3}{4}$	A	12	C	15
B	6	D	8	B	6	D	6	B	24	D	24

nominator ſit B 6, idem qui eſt Denominator Rationis A B. Id abſoluetur iuxta traditam methodum ſi tribus

terminis

terminis D 8, B 6, C 5, quartus proportionalis inueniatur qui eſt $3\frac{3}{4}$ ita vt ſtent in ſecundo ſchemate eædem Rationes; quæ in primo propoſitæ ſunt: ſed quarum idem ſit denominator communis 6; qui prioris Rationis iam erat denominator. Verum quia Antecedens C $3\frac{3}{4}$ non eſt terminus ſimplex, quippe conſtat numero integro cum fracto: quod alias operationes ex iis abſoluendas moleſtiores efficeret. Rationes eædem ad terminos ſimplices adducentur, terminis omnibus multiplicatis per 4, fractionis huius $\frac{3}{4}$ denominatorem, & primò quidem ducetur 4 in 3 numerum integrum, cui adhæret fractio, vt fiat 12: cui addetur 3, numerator fractionis, vt fiat 15 Antecedens C ſecundæ rationis. Deinde in Conſequentem inuentum 6, vtrique Rationi communem vt fiat 24. Denique in Antecedentem A 3. prioris Rationis, vt fiat 12, eius nouus Antecedens: & ita habebuntur termini ſimplices propoſitarum Rationum, vt refert ſchema tertium: qui tamen termini ad minores reduci poterunt, ſi eos omnes communis aliqua menſura metiatur, per quam ſinguli diuidi poſſint, & noui termini earundem Rationum per diuiſionem procreari.

Aliter.

Summi eſt momenti in Rationum negotio hæc Propoſitio, dignáque propterea quæ aliâ hac methodo ſoluatur; cum præſertim eam, omiſsâ priore, adhibiturus ſim impoſterum ſic autem habet.

Constructio.

E 30	F 24
A 6	C 8
B 3	D 5
G 15	

Repetito præcedenti schemate ducatur Rationis prioris A B Antecedens A, in Rationis posterioris C D Consequentem D; vt fiat E. Et vicissim, Rationis posterioris Antecedens C, in Rationis prioris Consequentem B; vt fiat F. Denique duo Consequentes B & D ducantur in se inuicem, vt fiat G. Dico Rationes A B & C D, reductas esse ad alias æquales E G, F G: quarum idem est Consequens G.

Demonstratio.

Termini A & B prioris Rationis multiplicant Consequentem D secundæ Rationis; & producunt E & G. Ergo per Prop. 18. lib. 7. eadem est Ratio E ad G, quæ A ad B. Similiter eadem erit Ratio F ad G; quæ est C ad D. eo quod termini C & D multiplicent B Consequentem prioris Rationis, & producãt F & G. Quare duæ datæ Rationes, quarum diuersus sit Consequens ad alias duas æquales reuocatæ sunt; quarum sit Consequens communis. Quod præstandum erat.

PROP. X. PROBL.

Duas quascumque Rationes in vnam per additionem colligere.

Constructio.

Constructio.

Sint duæ propositæ Rationes Antecedentis A ad Consequentem B; & Antecedentis C ad Consequentem D. In primis, si Consequentes non sunt æquales, ad æqualitatem reducantur per 9. Prop. Deinde addantur Antecedentes A & C, vt fiat E Antecedens Rationis, cui suus Consequens adiungatur F, idem qui fuerat Consequens, Rationibus datis communis. Dico factum esse quod proponebatur.

A 3	C $3\frac{3}{4}$	E $6\frac{3}{4}$
B 6	D 6	F 6

Demonstratio.

Nam cum Ratio C D & Ratio E F eosdem Consequentes habeant: erit hæc ad illam vt Antecedens E ad Antecedentem C per 7. huius. Propter quam eandem causam, Ratio E F erit ad Rationem A B. Vt Antecedens E ad Antecedentem A. Tres ergo Antecedentes illi eandem habent inter se Rationem: quam habent inter se trium illarum Rationum denominatores siue quantitates: Imò possunt ipsi denominatorum officio fungi. Vt suprà monui Prop. 5. Sed quantitas E coaluit ex additione quantitatum A & C, tanquam partium. Ergo & Ratio E F coalescit ex additione Rationum A B, C D, tanquam partium: denominatores siquidem siue quantitates Rationum, earum vbique munere fungi nati sunt. Duas ergo

D 2 Ratio

Rationes in vnum per additionem collegimus. Quod erat probandum.

Quod si plures Rationes quam duæ simul forent addendæ; duas primùm, deinde ex illis duabus factam, & tertiam colligere necesse erit, & ita deinceps.

PROP. XI. PROBL.

Rationem inuenire quæ ad datam Rationem; datam habeat proportionem.

Constructio.

A 3		D 12
	C 4	
B 2		B 2

Data sit Ratio A B: ad quam Ratio inuenienda, debeat habere proportionem cuius denominator est C, nempe quadruplam. Ducatur C in Rationis Antecedentem A, vt fiat D, dico Rationem D ad B, eam esse, quæ quæritur: quæ scilicet habeat ad Rationem A B, proportionem cuius denominator est C.

Demonstratio.

Ratio D B ad Rationem A B ita est; vt Antecedens D, ad Antecedentem A per 7. Huius, est enim vtriusque idem Consequens B. Sed Ratio D ad A, ea est quam denominat C ex Annotatis 3. num. ad Propos. 2 Ergo Proportio Rationis D B ad Rationem A B, cum habeat Denominatorem C datum, ea est quæ quærebatur.

Corolla

Corollarium.

De induſtria hic, Corollarium ſubiungo, quod mihi neceſſarium olim futurum ſcio; ideóque attente notatum velim. Eſt autem huiuſmodi.

Deducitur ex ſolutione præcedentis propoſitionis; quomodo inueniatur Ratio quæ toties aliam Rationem contineat: quoties hac aliam continet. Sit enim Ratio AB cuius Antecedens A aliquoties ſumatur, toties, verbi gratia, quot ſunt in C vnitates: vno verbo: A multiplicetur per C: vt fiat D: cui vt Antecedenti apponatur B Conſequens Rationis AB. Deinde Rationis DB Antecedens D, iterum per C multiplicetur vt fiat E nouus Antecedens, cuius Conſequens ſit etiam B.

A 4		D 8		E 16	
	C 2		C 2		
B 3		B 3		B 3	

Patet Rationem EB toties continere Rationem DB: quoties DB continet AB. Cum enim harum Rationum idem ſit Conſequens; ita ſe habent Rationes inter ſe; vt earum Antecedentes inter ſe. Sed Antecedens D. Toties continet Antecedentem A: quoties Antecedens E, continet Antecedentem D; cum vterque ductus fuerit in C. Ergo etiam Ratio DB toties continet Rationem AB; quoties ipſam Rationem DB Ratio EB continet.

Licet verò in propoſito exemplo terminos Antecedentes continuè proportionales ſtatuerim ad planiorem demonſtrationem aptiores, eo quod ſibi

adciſcant communem Conſequentem ; tamen id minimè neceſſarium eſt. Quod vt clariſſimè pateat; loco terminorum D & B, vel etiam E & B; alios quoſlibet eandem inter ſe Rationem ſeruantes; quam habent inter ſe termini D & B, E & B; ſubſtitue. Nihil in Rationibus mutationis continget, vnáque alteram continebit, vt prius; licet in terminis contingat diſcrimen maximum.

Nec oberit obſeruaſſe Rationem E B, hoc modo inuentam, eſſe tertiam proportionalem duabus Rationibus A B, D B: licet termini Antecedentes inter ſe, ac proinde & Conſequentes inter ſe, nullam certam Rationem obſeruent: vt ex dictis proximè colligere licet.

PROP. XII. PROBL.

Rationem minorem ex maiore detrahere.

A 3	C 8	E 5
B 4	B 4	B 4

Conſtructio.

Sit Ratio A B minor ſubſtrahenda à maiori C B: (niſi datæ Rationes eoſdem ſortitæ eſſent conſequentes; ad eos in primis reuocentur per Prop. 9.) Antecedens ergo C, Rationis C B; maior eſt Antecedente A. Sunt enim Rationes illæ inter ſe, vt Antecedentes ipſarum propter æqualitatem Conſequentium B. Sed Ratio C B maior ponitur Ratione A B: Ergo Antecedens

dens C maior eſt Antecedente A. dematur ergo A ex C & relinquatur E: cui velut Antecedenti tribuatur idem conſequens B. Dico Rationem E B relinqui detracta Ratione A B ex Ratione C B.

Demonſtratio.

Rationes A B, C B, E B, eundem Conſequentem B habentes, ita ſe habent inter ſe, vt earum Antecedentes A, C, E. Ita vt huiuſmodi Antecedentes, eandem inter ſe Rationem obſeruent. Quam Rationum illarum denominatores, eorúmque vices ſuppleant. Quia igitur duo Antecedentes A, & E ſimul, æquales ſunt Antecedenti C: etiam Rationes A B, E B, æquales erunt Rationi C B. Et quia Antecedens E, eſt differentia; qua Antecedens C ſuperat Antecedentem A: etiam Ratio E B erit differentia, qua Ratio C B ſuperat Rationem A B. Detracta igitur eſt Ratio minor A B ex maiore C B. Et inuentus eſt exceſſus, quo C B ſuperat A B: nempe Ratio E B. Quod erat faciendum.

PROP. XIII. DEFINIT.

Ratio Rationem multiplicare dicitur cum toties compoſita fuerit ea quæ multiplicatur, quot ſunt in multiplicante Rationes æqualitatis, & procreata fuerit aliqua Ratio.

VEL

Ratio Rationem multiplicare dicitur, cum procreata Ratio, eam habet poportionem ad

Ratio

Rationem multiplicatam, quam Ratio multiplicans habet ad Rationem æqualitatis.

Rationum Multiplicatio ſiue Compoſitio per ſe ſatis obſcura; iniri non potuit, niſi prius perſpecta foret eius notio: quam propterea duplici hac definitione in idem recidente expono: ei perſimili, quæ tradi ſolet multiplicationis numeri ſimplicis per numerum ſimplicem.

Sit ergo Ratio A, B, ducenda in Rationem C, D, toties ſumatur Ratio A B: quoties Ratio æqualitatis reperitur in Ratione C, D; vt procreetur Ratio E F; Ratio E F, dicetur multiplicatione Rationis A, B per Rationem C D produci.

A	4	C	6	E	6
B	5	D	4	F	5

Sed vt hæc clarius aperiantur. Exemplum ſingulare expono. Ratio A 4, ad B 5. ducenda eſt in Rationem C 6 ad D 4. Toties ſumenda eſt Ratio 4. ad 5; quoties Ratio æqualitatis eſt in Ratione 6 ad 4. Quoties verò eſt Ratio æqualitatis in Ratione 6 ad 4? Reſpondeo, toties; quoties Conſequens D 4, continetur in Antecedente C 6. Vt hic ſemel. Et præterea $\frac{2}{4}$ vel $\frac{1}{2}$ illius. Nam quoties Antecedens & Conſequens ſunt æquales; Rationem æqualitatis conſtituunt: Si ergo Ratio A 4 ad B 5 ſumatur ſemel, & præterea dimidia eius pars, (vt indicat fractus ille numerus

merus $\frac{2}{4}$ vel $\frac{1}{2}$; qui ſupereſt, diuiſo Antecedente C 6 per Conſequentem D 4.) Vt producatur Ratio E 6 ad F 5. Erit hæc multiplicatio Rationis A B per Rationem C D, & Ratio E F dicetur producta per huiuſmodi multiplicationem; eò quod eandem proportionem habeat ad Rationem multiplicatam A B: quam habet Ratio C D multiplicans ad Rationem æqualitatis.

PROP. XIV. DEFINIT.

Ratio per Rationem diuidi dicitur; cum Ratio ſumpta fuerit: quæ habeat ad Rationem æqualitatis eandem proportionem; quam Ratio diuiſa habet ad Rationem diuidentem.

VEL

Ratio Rationem diuidere dicitur: cum ſumpta fuerit Ratio quæ toties contineat Rationem æqualitatis: quoties Ratio diuidenda continet Rationem diuidentem.

Hæc definitio præcedentis inuerſa eſt: quam eodem Repetito exemplo, ſed inuerſo expono.

A 4	C 6	E 6
B 5	D 4	F 5

Ratio E F ſit diuidenda per Rationem C D. Si quoties Ratio E 6 ad F 5 continet Rationem C 6 ad D 4. Toties Ratio A 4 ad B 5 contineat Rationem æqualitatis. Vel ſi Ratio E F eandem habet proportionem ad Rationem diuidentem C D: quam habet Ratio A B ad Ra-

 tionem

tionem æqualitatis. Operatio illa, qua Ratio A B inuestigatur, dicitur diuiſio.

RROP. XV. THEOR.

Si ſit Ratio quædam, cuius Antecedens eſt A & Conſequens B. Tertius verò quilibet numerus C, Antecedentem A diuidat, & producat D: qui fiat Antecedens ad Conſequentem B. Idem verò C, Conſequentem B multiplicet, & producat E: qui fiat Conſequens ad Antecedentem A. Dico Rationes duas D B & A E eſſe æquales.

Demonſtratio.

A 24		D 6	A 24
	C 4		
B 5		B 5	E 20

Quia C diuidens A produxit D: ſi idem C multiplicet D producet A. Quare cum idem numerus C, multiplicet D & B, & producat A & E: erit Antecedens A ad Conſequentem E, vt Antecedens D ad Conſequentem B. Per 15. lib. 5. Euclidis. Partes enim D, & B cum pariter multiplicibus A, E in eadem ſunt Ratione. Conſtat ergo propoſitum.

PROP. XVI. PROBL.

Oporteat Rationem per Rationem multiplicare.

Conſtructio.

Constructio.

A 4	C 6	E 6
B 5	D 4	F 5

Sit Ratio A 4. Antecedentis ad B 5. Consequentem, multiplicanda per Rationem C 6 ad D 4. Quia Ratio C 6 ad D 4 continet Rationem æqualitatis semel & eius semissem (si enim Antecedens 6 diuidatur per Consequentem 4, patebit hunc in illo semel contineri quæ est vnica Ratio æqualitatis: & præterea dimidiam huius partem) sumatur semel Ratio A 4 ad B 5. Cui addatur dimidia eius pars inuenta per Prop. 11. multiplicetur scilicet Antecedens 4 quasi foret numerus absolutus, nec vlli Rationi alligatus per $\frac{1}{2}$ numerum item absolutum; gignetur per hanc multiplicationem $\frac{4}{2}$ siue 2: cui velut Antecedenti apponatur idem Consequens B 5. Erit ergo Ratio Antecedentis 2 ad Consequentem 5 dimidia pars Rationis A 4, ad B 5. Iuxta operationem citatæ. Propositionis, quam de industria hic prosecutus sum. Iam hæc Ratio 2 ad 5; ad Rationem 4 ad 5 addatur per Prop. 10. addatur scilicet 2 Antecedens, ad Antecedentem 4, vt fiat vnicus Antecedens E 6: cui apponatur idem Consequens F 5. Dico Rationem E 6 ad F 5. Produci per multiplicationem Rationis A B in Rationem C D.

Demonstratio.

Toties Ratio producta E F continet Rationem multiplicatam A B. Quoties Ratio C D multiplicans

E 2 continet

continet Rationem æqualitatis: vt patet ex constructione. Ergo Ratio E F per Prop.13. ea est quæ quærebatur.

Aliter.

A 4	C 6	E 24
B 5	D 4	F 20

Sit eadem Ratio, quæ prius A B multiplicanda per Rationem C D. Ducantur in se duo Antecedentes A C: duo item Consequentes B, D: & producant illi quidem E; isti verò F. Dico Rationem EF eam esse quæ producitur ex multiplicatione mutua duarum Rationum A B, C D.

Demonstratio.

A 4	C 6	G 4	E 24
B 5	D 4	H 4	F 20

Ponatur Ratio æqualitatis G H: cuius termini æquales debent esse inter se; sint verò æquales consequenti D, Rationis C D multiplicantis. Quia igitur ex Prop. 13. ita se debet habere Ratio æqualitatis G H ad Rationem multiplicantem C D: quemadmodum Ratio A B multiplicata se habet ad Rationem E F. Productam ex multiplicatione Rationis A B, per C D. Vt autem Ratio G H, se habet ad Rationem C D, cuius Consequens D æqualis est Consequenti H: ita se habet Antecedens G ad Antecedentem C per 7. Huius.
Hoc

Hoc eſt, Conſequens D ad Antecedentem C Rationis C D. Si ergo fiat vt D ad C: Ita Ratio A B multiplicata ad aliam E F: erit E F: Ratio quæ quæritur, vt exigit Prop. 13. huius. Diſponantur ergo termini ad Regulam Proportionum abſoluendam hoc modo.

D 4.	C 6.	A 4 ? B 5	E 24 B 5	M 6 B 5	E 24 F 20

Ducatur ſecundus terminus C in A B fiet E B, (Conſequens enim B immutatus producto E, adiungitur vt Antecedenti) diuidatur hic productus E B per primum terminum D Regulæ aureæ. Producetur per hanc diuiſionem Ratio M B. Diuiſo enim Antecedente E per terminum D, fit M; cuius Conſequens eſt B immutatus (vt in fractis numeris fieri ſolet; quos Rationum termini imitantur) erit ergo tunc Ratio M B ea, quæ quæritur id eſt, M B toties continebit Rationem A B multiplicatam quoties Ratio C D multiplicans continet Rationem æqualitatis. Sed Rationi M B, æqualis eſt Ratio E F inuenta iuxta traditam methodum: multiplicatis ſcilicet Antecedentibus A & C, vt fiat Antecedens E; & conſequentibus B & D, vt fiat Conſequens F. Id patet ex Prop. 15. per quam conſtat æquales fore Rationes quando datis duobus numeris E, B. Idem numerus D diuidit eorum alterũ, nempe E; & producit quendam vt M: cui adiungitur velut Conſequens, alter numerorum B: vt fiat Ratio M B, & quando idem D multiplicat alterum numerorum nem-

pe B, vt fiat F, qui ſit Conſequens alterius numeri E immutati, vt fiat Ratio E F. Patet ergo tradita methodo, quæ ſimpliciſſima eſt, recteſolui propoſitum problema.

PROP. XVII. PROBL.

Oporteat Rationem datam per datam Rationem diuidere.

Constructio.

E	6	A	4
F	5	B	5

Vt inuerſum eſt problema hoc præcedentis problematis: ita inuerſa futura eſt eius ſolutio: quam tamen eadem methodo generali: adhibita ſcilicet Regula illa vere aurea proportionum auſpicabor: inita etenim ſæpiùs eadem via, quo tritior, eò planior euadet.

Sit igitur Ratio E F diuidenda per Rationem A B. Quia ex Prop. 14. Eadem eſt proportio Rationis diuidentis A B ad Rationem E F diuidendam: & Rationis æqualitatis ad Rationem, quæ quæritur, quæque quaſi quotientis locum occupat; erit etiam permutando eadem proportio Rationis A B diuidentis ad Rationem æqualitatis; & Rationis E F diuidendæ ad Rationem quæ quæritur vt quotiens. Ita ergo diſponendi forent tres noti termini, aptè ad abſoluendam auream Regulam, vt habet hoc ſchema. In quo A B eſt Ratio diuidens:

A 4	G 5	E 6
B 5	H 5	F 5

diuidens: ſecundus terminus eſt GH Ratio æqualitatis, cuius Antecedens & conſequens iidem ſint cum Conſequente B, Rationis AB: tertius denique ſit Ratio diuidenda EF. Sed quia duæ Rationes AB, GH eoſdem habent Conſequentes B, H; ideóque per Prop. 7. ita ſe habent inter ſe; vt Antecedentes A, G, inter ſe. Satis erit ad quotientem huius diuiſionis obtinendum ſi Antecedens A ſolus primum locum Regulæ

		E 6	L 30	L 30
A 4	B 5			
		F 5	M 5	N 20

aureæ occupet: Secundum verò occuparet Antecedens G, ſed cum æqualis ſit Conſequenti B; cenſeatur ipſe B ſecundum illum locum ſibi vendicare; tertius denique locus debetur Rationi diuidendendæ EF. Iam terminus B ducatur in terminos EF, velut abſolutos & in modum fracti numeri; fiet per hanc multiplicationem quantitas LM. Hæc iuxta tenorem Regulæ diuidatur more fractorum terminorum per primum A. Fiet quotiens LN. Dico ergo Rationem Antecedentis L ad Conſequentem N, eam eſſe quæ quæritur; & indicare proportionem Rationis diuidendæ EF, ad Rationem AB diuidentem. Quod exemplum in hoc, caſu in quo Conſequentes B & F, ponũtur æquales: (in aliis poſſent per Prop. 9. ad æqualitatem reduci) euidenter oſtendit.

oſtendit. Ita enim eſt Ratio E F, ad Rationem A B; vt Antecedens E ad Antecedentem A. Quæ Ratio E, ad A ſimilis eſt Rationi inuentæ L N. Verum illud à priori probari debet in hunc modum.

Demonſtratio.

Ex diſcurſu in conſtructione allato: tota pene demonſtratio conſtructionis ipſius habetur. Nam patet ita ſe habere Rationem A B diuidentem, ad Rationem G H æqualitatis: vt ſe habet Ratio E F. diuiſa, ad Rationem L N inuentam. Ergo Permutando ita ſe habebit Ratio A B, ad Rationem E F, diuidens ſcilicet ad diuidendam: vt Ratio G H æqualitatis ad Rationem L N. Ergo per Prop. 14. rectè diuiſa eſt Ratio E F, per Rationem A B; Quod erat faciendum.

Aliter.

Conſtructio.

A 4	E 9	C 8
B 3	F 6	

Traditur hic modus à Geometra Prop. 125. lib. 8. ſic autem habet. Sit data Ratio E F, diuidenda per Rationem A B, fiat vt Conſequens B Rationis diuidentis ad A Antecedentem: vt F Conſequens Rationis diuidendæ ad C. Ratio E Antecedentis, datæ Rationis diuidendæ, ad Conſequentem inuentum, ea eſt Ratio quæ quæritur.

Demon

Demonstratio.

Ex constructione ita est B ad A; vt F ad C. Ergo inuertendo. Vt A ad B; ita C ad F. Sed, vt in superiori solutione ostensum est, vt A ad B; ita est Ratio E F diuidenda ad Rationem quæsitam, quæ velut quotiens est huius diuisionis. Ergo vt C ad F; ita est Ratio E F ad quotientem Rationem. Sed vt C ad F; ita est Ratio E F ad Rationem E C. Nam duarum Rationnm E ad F; & E ad C; idem est Antecedens E. Ergo per Prop. 8. huius. Ita se habet Ratio E F ad Rationem E C vt se habet reciproce Consequens C Rationis E C, ad Consequentem F Rationis E F. Sed vt Consequens C ad Consequentem F. Ita ostensum est se habere Rationem E F, ad eam quæ inuestigatur. Ergo Ratio E C illa ipsa est, quæ diuisione Rationis E F, per Rationem A B, producitur.

Aliter.

Constructio.

A 4	E 9	C $2\frac{1}{4}$
B 3	F 6	D 2

Datæ sint eædem Rationes. Diuidatur tam Antecedens E Rationis diuidendæ, per Antecedentem A Rationis diuidentis, & fiat C, quam Consequens illius F, per huius Consequentem B & fiat D. Dico Rationem C D eam esse, quæ quæritur.

Demonstratio.

Si termini A & B Rationis diuidentis ducantur in terminos C & D Rationis inuentæ, ſinguli in ſingulos: producetur Ratio EF. Vt patet. Ergo Ratio EF rectè diuiſa eſt per Rationem AB, & Ratio CD rectè inuenta tanquam quotiens.

OBSERVATIO.

Ex his conſtat nihil aliud inquiri per diuiſionem vnius Rationis per alteram: quam Rationem illam, quam habent inter ſe Rationes propoſitæ, vel, vt verbis vtar magis propriis iuxta definitionem proportionis Prop. 4. expoſitam. Inquiritur Proportio inter Rationem diuidendam & Rationem diuidentem: quæ Proportio, cum nihil aliud ſit quam Ratio quam habent inter ſe denominatores Rationum datarum: nihil aliud quæritur per diuiſionem vnius Rationis per aliam; niſi cognitio denominatorum vtriuſque illius Rationis: illis enim denominatoribus cognitis, eorum Ratio nota continuò euadit, per ſolam Relationem denominatoris ad Rationem diuidendam pertinentis, ad denominatorem Rationis diuidentis tanquam conſequentem. Vt in prioris ſolutionis exemplo, in quo Ratio E 6 ad F 5 diuiditur per Rationem A 4 ad B 5; & inuenta eſt Ratio tanquam quotiens L 30 ad N 20, Rationis huius L N termini ſunt denominatores Rationum EF diuidendæ, & AB diuidentis: L quidem prioris EF; N verò poſterioris AB. Eaque Ratio

A 4	E 6	L 30
B 5	F 5	N 20

Ratio L ad N (quæ Proportio Rationum E F ad A B dici debet) oſtendit quam habitudinem ſiue Rationem habeat Ratio E F ad A B. Quod in Propoſito exemplo, in quo Conſequentes B & F ſunt æquales, Luce clarius patet. Ita enim ſe habet Ratio E F ad Rationem A B per Prop. 7. vt Antecedens E ad Antecedentem A: Sunt autem Antecedentes Rationum, quarum idem eſt Conſequens, denominatores earum: conſtat autem ita ſe habere L 30 ad N 20; vt ſe habet E 6 ad A 4. Ex quibus facilis & clara oritur methodus Rationem per aliam diuidendi. Si enim ad æquales Conſequentes reducantur; ita ſe habet Antecedens Rationis diuidendæ ad Antecedentem diuidentis; vt illa Ratio ad iſtam: ita vt Ratio duorum illorum Antecedentium ſit velut quotiens diuiſionis, Rationis vnius per aliam.

Ex proximè dictis colligitur demonſtratio ſolutionis cuiuſdam facillimæ, Problematis eiuſdem quæ ſic habet. Sit Ratio E F diuidenda per Rationem A B. Ducatur Antecedens A Rationis diuidentis, in Conſequentem F Rationis diuidendæ, vt fiat D Conſequens Rationis futuræ. Ducatur item Conſequens B in Antecedentem E; & fiat C. Dico Rationem C D, eſſe Rationem quæ inueſtigatur, & eſſe Proportionem Rationis E F ad Rationem A B. Si

A 4	E 9	C 27
B 3	F 6	D 24

enim acutiùs res attendatur; comperiemus hac operatione, haſce duas Rationes ad eundem Conſequentem reduci, licet illius nulla fiat mentio. Fieret autem ſi præciperetur, vt Conſequens B duceretur in Conſeſequentem F, vt haberetur Conſequens communis; ad quem, Ratio Antecedentis C, eadem foret, quæ E F; & Ratio Antecedentis D eadem quæ A B. Tunc verò duo termini C & D, quia eundem haberent Conſequentem; eſſent denominatores Rationum E F, A B, & illarum habitudinem exponerent; vt ex dictis paulo ante clarum eſt.

PROP. XVIII. DEFINIT.

Compoſitio Rationis eſt multiplicatio denominatorum ſeu quantitatum Rationum quotcumque, aliquam efficiens Rationem.

Hæc eſt compoſitionis Rationum definitio ab Euclide lib. 6. Defin. 5. totidem ferè verbis tradita. Cuius expoſitio non poteſt non eſſe clariſſima; tot editis in Euclidem accuratiſſimis commentariis. Qua etiam in parte Geometra ſuam non eſt paſſus operã deſiderari lib. 8. princ. 2. quorum omnium lucubrationes, ſuper hac re conſuli poterunt. Exemplum tantùm hic interim appono huiuſmodi, plura paulo poſt producturus: vnde totum hoc compoſitionis negotium tam obſcurum quam graue, euidenter declarabitur. Sit Ratio A 8 ad B 2, cuius denominator ſeu quantitas eſt C 4. Sit etiam Ratio D 6 ad E 3, cuius denominator

G
C 8 F
4 2
8. 2. 6. 3
A B D E

tor eſt F 2. Multiplicentur hi duo denominatores 4 & 2 vt fiat G 8, erit 8 denominator Rationis compoſitæ ex Ratione quadrupla 8 ad 2, vel aliorum quorumcumque terminorum Rationem quadruplam obſeruantium; & ex Ratione dupla 6 ad 3, vel aliorum Rationis eiuſdem terminorum. Quod ſi plures adhuc Rationes forent: multiplicaretur denominator 8 proximè inuentus per denominatorem Rationis tertiæ inſequentis; & haberetur denominator Rationis ex tribus illis Rationibus compoſitæ: & ita de pluribus dicendum eſt.

Porro hæc compoſitio Rationum per multiplicationem denominatorum facta; æquè haberetur, multiplicatis ipſis terminis vt Prop. 16. docui. Nam multiplicatis Antecedentibus 8 & 6 ſimul; & ſimul etiam Conſequentibus 2 & 3. Fient 48 & 6: Rationis verò huius denominator eſt 8, vt patet, ſi iuxta ea quæ Prop. 5. ſunt expoſita inquiratur, diuiſo Antecedente 48 per Conſequentem 6. Et hinc conſtat non eſſe omnino neceſſarium ad Rationum hanc compoſitionem vt denominatores inter ſe multiplicentur: ſed ſatis etiam eſſe, ſi ipſi Rationum termini inter ſe ducantur: habebitur enim peracta terminorum multiplicatione, quædam Ratio quæ dici debet compoſita, ex Rationibus, quorum termini ſunt multiplicati, &

cuius denominator oritur ex multipliticaone denominatorum ad ſingulas Rationes pertinentium.

PROP. XIX. PRINCIPIVM.

Duplex eſt Compoſitionis genus in Rationibus: Compoſitio preſſe ſeu ſpecifice ſumpta; & multiplicatio.

Hic mentionem non facio Compoſitionis illius Rationum: qua plures Rationes in vnam illis omnibus æqualem colliguntur per additionem iuxta Prop. 10. huius. Illius enim Compoſitionis negotiũ ab hoc longe diuerſum eſt, quod ductis in ſe Rationibus non ſibi additis, abſoluitur. Compoſitio ergo Prop. præcedenti definita genus eſt ad Compoſitionem preſſe ſumptam, & multiplicationem. Compoſitio preſſe ſumpta eſt quando Rationes Rationem aliquam componentes, vel per ſui, vel per ſuorum denominatorum multiplicationem, ſunt inter ſe diſſimiles, vt in ſuperiori exemplo duæ Rationes 8 ad 2, & 6 ad 3 Rationem octuplam componentes ſunt diſſimiles, vel earum denominatores 4 & 2 inæquales. Multiplicatio verò, vt Geometrarum inſtitutum voluit, eſt Compoſitio Rationum ſimilium ſiue æqualium: Quæ fit multiplicatis Rationibus quotcumque æqualibus, deinceps quotquot extiterint; vel earum denominatoribus: quos tunc æquales eſſe neceſſe eſt. Vt ſi tres huiuſmodi Rationes quorum termini duplam ſeruant Rationem ducantur in ſe, primò quidem ducta A B in ſecun

A 4	C 6	E 10	G 240	. 2. 2. 2. 8
B 2	D 3	F 5	H 30	

ſecundam C D, vt fiat Antecedens 24. Ex Antecedentibus A & C ductis; & Conſequens 6, ex Conſequentibus B & D. Deinde iterum ductis terminis proximè repertis 24 & 6 in terminos E 10, & F 5 tertiæ Rationis, vt fiat Ratio G H. dicetur Ratio G H propriè & ſpecificè multiplicata ex Rationibus illis tribus æqualibus; ex quibus generice dici debet compoſita. Denominator verò Rationis huius G H, oritur etiam ex denominatoribus ſingulis harum Rationum æqualium æqualibus in ſe ductis. Cum enim ſint tres Rationes, & eæ duplæ. Denominator 2. Ter poni debet, & ita deinceps in ſe duci; vt tandem fiat 8 denominator Rationis G H compoſitæ ex illis tribus duplis Rationibus.

Iam verò huius generis multiplicationis Rationum, variæ ſunt ſpecies: alia enim eſt quæ duplicatio dici debet: alia Triplicatio: alia Quadruplicatio, Quintuplicatio, &c. Duplicatio dicitur cum duæ Rationes æquales in ſe ducuntur: vt ſi ducantur Rationes A B, & C D in ſe per Prop. 16. Fiet Ratio 24 ad 6: & hæc Ratio dicetur duplicata Rationis A B, vel C D. Quia ſi Ratio A B bis ponatur & ſic in ſe ducatur iuxta Prop. citatam, producetur Ratio 16 ad 4 quæ multiplicata dici debet ex Ratione A B & A B, ſiue A B bis poſita: & ideo 16 ad 4 illius duplicata dicitur. Sicut etiam

Ratio

Ratio 36 ad 9 quæ oritur ex Ratione C D in Rationem C D ducta; duplicata eſt tam Rationis C D quam Rationis A B ; & aliûs cuiuſcumque Rationis duplæ. Quod idem fieri contingit ſi denominator 2 Rationis duplæ bis ponatur & ita 2 in 2 ducatur vt fiat 4. Denominator enim 2 Rationis duplæ, eſt Ratio dupla in minimis terminis, vt Prop. 5. expoſui; ſed non exprimitur illius conſequens qui eſt vnitas quam connotat. Exprimatur igitur Ratio dupla in minimis terminis hoc modo 2 ad 1 hæc Ratio bis poſita & multiplicata producet Rationem 4 ad 1 quæ duplicata dici debet Rationis 2 ad 1 & aliarum omnium Rationum ſimilium hoc eſt duplarum. Idem de triplicata, Quadruplicata, &c. Dicendum eſt.

PROP. XX. DEFINIT.

Compoſitio Rationum continua eſt quando termini Rationum qui in ſe ducuntur ad componendam Rationem ſunt Conſequentes vnius Rationis & Antecedentes alterius ſequentis Rationis.

Siue Rationes ſint ſimiles ſiue diſſimiles in eo conueniunt vt continuæ eſſe poſſint. Ecce continuas diſſimiles A ad B ſeſquitertia C (qui idem eſt cum B) ad

A 8	C 6	E 3	vel	A 8	B 6	C 3	D 9
B 6	D 3	F 9					

D dupla : E idem cum D ad F ſubtripla. Vel continuentur

nuentur huiusmodi termini vt habet. Secundum schema: continuæ Rationes similes eodem modo se habent vt hoc alterum schema refert. In quo Antecedens A ad B Consequentem habet Rationem duplam: B verò factus Antecedens, ad Consequentem C Rationem etiam habet duplam, &c.

A 32	B 16	C 8	D 4

PROP. XXI. DEFINIT.

Progressio Geometrica est series plurium similium Rationum per continuos terminos extensa.

A 2	B 4	C 8	D 16	E 32

Vt series hæc A,B C,&c. Duplæ Rationis, cuius termini sunt communes duabus Rationibus immediatis; quas quasi commune vinculum nectunt; cùm sint Consequentes Rationis præcedentis, & sequentis Antecedentes: Progressio Geometrica dicitur; progressio quidem: quia eodem semper gradu, æquali scilicet Ratione extenditur: Geometrica verò, eo quòd insignis sit eius vsus in Geometricis, vel ad distinctionem progressionum aliarum.

PROP. XXII. THEOR.

Si inter duas quantitates A & B mediæ quotcumque C, D interponantur Ratio A ad B componitur ex Rationibus intermediis A ad C; C ad D: D ad B.

A 12,	C 8,	D 4.	B 6

Theorema hoc habetur tanquam principium per ſe notum apud doctiſſimum Geometram noſtrum, lib.8. princ.2. *Quod*, inquit, *obſcurius quidem eſt, quam ferat principiorum natura; ſed communi gregarióque Geometrarum vulgò:* à quorum numero non ita me amo, vt me eximam, tenuis meæ ſuppellectilis ſatis conſcius. Illud igitur vt Theorema, mihi meíque ſimilibus demonſtrandum propono. Suaſit in primis tam libera duos inter terminos, alios quotcumque, & quamcumque Rationẽ inter ſe habentes collocãdi facultas; ex quibus deinde naſcatur Ratio extremorum; itavt nullæ ſint Rationes; ex quibus data Ratio componi non poſſit: quis aſſentiatur ſine demonſtratione? Deinde cum propoſitio hæc demonſtrabilis ſit, id eſt, medium habeat per quod ſillogiſmus inſtitui poſſit, cuius ipſa, ſit concluſio: eadem ſanè non eſt quoad ſe & per ſe primò nota. Quæ tamen conditio à Logicis requiritur, vt propoſitio aliqua in principiorum numerum exponatur. Et verò in eorum numerum iſtud ipſum ab Authore Quadraturæ non niſi ægre reponi videtur.

Sic

Sic enim ait loco citato. *Quod principium etsi verissimum sit, & à magnis Geometris non semel vsurpatum, non tamen vsque adeò omnibus arridet, vt eius demonstrationem non requirant. Ego verò censeo cum omnibus Geometris tamdiu inter principia esse censendum, donec alicui ratio occurrat hoc ipsum Geometrica demonstratione inter Theoremata reducendi.* Reducetur ergo imposterum: En etenim tibi, peritissime Geometra, ad id necessariam illam demonstrationem.

Præparatio.

A 12.	C 9.	B 3.	D 108.	E 27

Inter duos terminos A & B medius C interiiciatur. Tum A ducatur in C, vt fiat D rectangulum: & C ducatur in B, vt fiat rectangulum E.

Demonstratio.

Ratio termini A ad terminum B est eadem quæ rectanguli D ad rectangulum E. Sed ratio rectanguli D ad rectangulum E componitur ex Ratione A ad C & ex Ratione C ad B. Ergo etiam Ratio A ad B componitur ex Ratione A ad C & Ratione C ad B.

Probatur maior. Nam terminus medius C ducitur tam in A, vt producat D; quam in B, vt producat E. Ergo vel per 1. lib. 6. vel per 17. lib. 7. (Vt scilicet idem argumentum tam continuæ, quam discretæ quantitati inseruiat) eadem est Ratio A ad B, & D ad E.

Minor verò, ex dictis superiùs Prop. 16. & Prop. 18.

Constat euidentissimè. Nam si quantitates siue denominatores Rationum A ad C; & C ad B in se ducantur: per citatas Prop. efficient Rationem compositam ex Rationibus A ad C, & C ad B. Sed siue denominatores Rationum, siue ipsi Rationum termini in se ducantur, eadem Ratio componitur, vt citato loco exposui. Ergo Ratio D ad E (quæ ostensæ proximè est eadem cum Ratione A ad B) quæ ex ductu terminorum A in C vt Antecedentem secundæ Rationis; & C vt Consequentis primæ Rationis, in B Consequentem Rationis secundæ orta est: Componitur ex Ratione A ad C, & Ratione, C ad B. Verùm ergo est propositum Theorema quando inter duos terminos medius vnicus interponitur. Sed æquè verùm est quando plures intercedunt.

Sint enim inter duos terminos A, & B, duo inter-

A 12	C 9	D 8	B 6

iecti, C & D. Probabitur primò ex proxima Ratiocinatione Ratio A ad D componi ex Ratione A ad C, & Ratione C ad D, quasi duo dati extremi termini forent A & D, inter quos solus C immittitur. Deinde duo extremi A & B assumentur, inter quos D solus positus est, nulla amplius habita Ratione termini C: & probabitur Ratio A ad B componi ex Ratione A ad D, & Ratione D ad B. Sed Ratio A ad D iam ostensa est componi ex Ratione A ad C, & C ad D. Ergo Ratio A ad B ex Rationibus A ad C, C ad D, & D ad B componitur.

componitur. Eodem modo Ratiocinandum foret, si plures quàm duo termini medij inter duos extremos statuerentur: ita vt verissimum sit Theorema propositum. Vnde verùm etiam sit, minus aptè in numerum principiorum per se notorum reduci, cum reuera demonstretur per medium, quod ipsum necdum immediatum est, cum pendeat ex propositionibus Euclidis citatis quæ & ipsæ demonstrantur adhuc per alia media ad principia magis accedentia.

PROP. XXIII. PROBL.

Sit data Ratio quæcumque A ad B. Quam oporteat in quotcumque Rationes æquales diuidere.

Superius Prop. 17. huius. Ostendi modum, quo Ratio quælibet per aliam datam Rationem diuidi possit: hic verò quæritur modus quo data Ratio diuidatur, non per datam Rationem; sed in datas Rationes æquales quotcumque, qui sensus longe à priori est diuersus; & in hunc recidere videtur, vt ex dictis de compositione Rationis constat, scilicet, quæruntur Rationes æquales quotcumque, quæ datam Rationem A ad B componunt.

Constructio.

A 12, B 3. A 12, C 6. B 3

Data sit Ratio A ad B in duas Rationes æquales diuidenda.

uidenda. Reperiatur inter duos terminos datos, medius terminus C Proportionalis per 13 lib. 6. in quantitate continua, in discreta verò idem præstandi modus colligitur ex 20.lib.7. & passim apud Arithmeticos traditur. Ducatur scilicet terminus A in terminum B: & ex producto Radix quadrata eruatur C. Dico datam Rationẽ A B in duas æquales diuisam esse posito inter A & B medio termino C. Est enim A ad C, vt C ad B. Ergo Ratio A ad B est diuisa in duas Rationes æquales. Vel iuxta alterum problematis sensum, inuentæ sunt duæ Rationes æquales datam Rationem A B componentes, beneficio termini medij C inter duos terminos datæ Rationis interiecti. Quod si placeat animi gratiâ experiri per Prop. 17. quàm sit hæc peculiaris diuisio conformis illi, quam ibidem tradidi. Sic operare habitis termino, C & Ratione C B vel A C; diuide Rationem A B per alterutram, siue A C, siue C B. Ratio, quotientis loco, inuenietur A C aut C B; quæ indicabit Rationem A B, ita se habere ad Rationem C B. Vt se habet A B ad quotientem A C, vt verum est: cum duæ Rationes A C, & C B sint æquales.

Sed si eadem Ratio A B in tres vel plures æquales Rationes diuidenda foret. Duo medij termini, vel plures Proportionales essent reperiendi. In quo Geometria laborauit hactenus. Fœlicior hæc in parte Arithmetica extitit, præsertim si suis illis numeris surdis, imò, & cæcis vti liceat: quidni porro liceat? docet enim inter duos datos terminos, medios quotcumque Proportionales statuere; vt inter datos A 12 & B 3,

duos

duos medios statuet C & D, hoc modo: A 12, C R cub. 432, D R cub. 108, B 3 erítque Ratio A B in tres æquales AC, CD, DB distributa: & ita de cæteris. Quare datam Rationem in quotcumque æquales diuisi. Quod erat faciendum.

RROP. XXIV. THEOR.

In omni progressione Geometrica Ratio termini cuiuslibet in serie assumpti, ad primum terminum est multiplicata per Rationem secundi termini, ad eundem primum, toties quot Rationes numerantur à primo termino vsque ad terminum assumptum.

Demonstratio.

Propositio hæc non alia eget probatione quam expositione. Sit ergo progressio.

A 2	B 4,	C 8,	D 16,	E 32	&c.

Et in eius serie terminus E conferatur ad primum terminum A. Dico Rationem E A multiplicari (in mentem reuocanda est hîc Propositio 19. eiúsque sensus) per Rationem secundi termini B ad eundem primum terminum A toties sumptam; quot sunt Rationes à primo termino A vsque ad E. Quis ambigat? Ratio E ad A componitur ex Rationibus E ad D; D ad C, C ad B ac tandem B ad A per Prop. 22. Huius. Sed eæ omnes sunt Rationes æquales, tum inter se,

tum

tum primæ B ad A; quot ergo Rationes numerantur vſque ad E, toties Ratio E ad A dicenda eſt componi, ſiue multiplicari, per Rationem B ad A. Quod erat demonſtrandum.

OBSERVATIONES.

A 2	B 4	C 8	D 16	E 32	F 64	&c.

Primò, conſtat ergo in ſuperiori progreſſione in exemplum allata, tertium terminum C ad primum A Rationem habere duplicatam Rationis B A, ſecundi ſcilicet termini ad eundem primum: componitur enim Ratio C A, ſiue, vt magis propriè & ſpecificè loquar, multiplicatur per duas Rationes C B, B A quæ cùm ſint æquales, duplicatur B A ad componendam Rationem C A. Eodem modo Ratio quarti termini D, ad primum A, eſt triplicata Rationis B A: cuius etiam quadruplicata erit Ratio quinti termini E ad A: & ita deinceps.

Secundò, In eadem progreſſione Ratio quinti termini E, ad primum A, duplicata eſt Rationis tertij termini C ad eundem terminum primum A. Nam tres termini E, C, A, ſunt continuè Proportionales, & progreſſionem conſtituunt per Rationes æquales E C, C A. Ergo Ratio tertij termini E, ad primum A duplicata eſt Rationis ſecundi termini C ad eundem primum A. Vt paulò ante declaratum eſt.

Tertiò hinc patet quo ſenſu dicatur vna Ratio alteram continere bis, ter, quater, &c. Per multiplicatio-

nem

nem vel in ſenſu multiplicationis. Vel illam multiplicare. Item quomodo vna Ratio alteram toties in ſenſu multiplicationis contineat, ſiue toties multiplicet: quoties hæc tertiam continet, vel multiplicat. Nam in allata progreſſione Ratio C A, Rationem B A continet bis in ſenſu multiplicationis, ſiue bis multiplicat, hoc eſt, vno verbo, duplicat. Ratio E A eandem B A, quater multiplicat, ſiue quadruplicat, ſiue quater continet in ſenſu multiplicationis. Dicetur verò Ratio E A quinti termini ad primum, toties in ſenſu multiplicationis continere Rationem C A tertij termini ad primum: quoties Ratio hæc C A continet in eodem ſenſu Rationem B A ſecundi termini ad primum. Nam vt iam obſeruaui, Ratio E A duplicata eſt Rationis C A eámque bis continet. Sed Ratio C A bis etiam continet Rationem B A, eiuſque duplicata eſt. Ergo Ratio E A toties in ſenſu multiplicationis continet Rationem C A, quoties hæc continet Rationem B A.

Quartò, Ex iis quæ proxime attigi de cõtinentia Rationũ in ſenſu multiplicationis, occaſio ſe ſe offert idonea inquirendi, an alio in ſenſu, quam iſto multiplicationis, vna Ratio alteram continere; totiéſve continere, quoties hæc aliam continet, dici queat; & quomodo huiuſmodi continẽtiæ inter ſe differant. Vnum enim iſtud caput, vel præcipuum fortaſſis eſt, quò tota hæc diſputatiuncula referri debet, vt ſuo loco monebo. Cui quæſtioni reſpondeo: vt duplex genus Rationis componendæ obſeruare licet, vnum per additio-

nem, per multiplicationem; alterum: ita eſt duplex continentiæ genus inter ſe valde diuerſum: vnum per additionem, alterum per multiplicationem; provt enim compoſitum diuerſum eſt, ita partes, quæ vtrumque componunt, quæque in eo continentur, diuerſas eſſe neceſſe eſt. Repetatur hic progreſſio ſuperior: cuius termini duplam Rationem obſeruant.

A 2	B 4	C 8	D 16	E 32

Terminus eius E quintus ad primum A, Rationem habet Quadruplicatam Rationis B A, vt expoſui ſupra, eámque continet quater in ſenſu multiplicationis. At in ſenſu additionis ſiue abſoluto & ſimplici, Ratio E A Rationem B A octies continet, eiuſque eſt octupla. Nam cum earum Rationum idem ſit conſequens A: ita ſe habent Rationes inter ſe per Prop. 7. Huius, vt Antecedentes E & B: quorum ille hunc continet octies. Hoc ergo primum eſto horum duorum ſenſuum diſcrimen, inſigne ſatis vt patet, ſed ecce non leuius aliud

Secundum diſcrimen duplicis huius ſenſus, hoc eſt. Oſtenſum eſt Rationem E A, toties in ſenſu multiplicationis continere Rationem C A: quoties Ratio C A continet Rationem B A, hoc eſt bis. At in ſenſu ſimplici & abſoluto. Ratio E A continet Rationem C A quater. Nam vtriuſque eſt idem Conſequens A: propterea iuxta Prop. 7. Huius. Ita ſe habent hæ duæ Rationes, vt Antecedentes E & C. At Ratio C A haud

haudquaquam continet quater Rationem B A: Sed bis tantum; ſunt enim ita illæ etiam Rationes, vt Antecedentes inter ſe per citatam Prop. 7. huius.

Tertium diſcrimen eſt, quod in ſenſu multiplicationis nulla obſeruatur Denominatoris per quem progreſſio promouetur diuerſitas. Siue is fuerit duplæ, triplæ aut aliûs Rationis: Imò etiam ſi minoris fuerit inæqualitatis: ſemper Ratio tertij termini ad primum dicetur bis continere Rationem ſecundi termini ad primum. At in ſenſu abſoluto longe aliter ſe res habet. Mutatur enim Ratio terminorum, quoties progreſſio ſpeciei mutationem patitur. Vt patet in hac duplici diuerſæ ſpeciei progreſſione. In qua vtraque Ratio termini tertij C ad primum A, dici debet bis in ſenſu multiplicationis continere Rationem B A. At in ſenſu abſoluto, Ratio C A in priore progreſſione continet Rationem B A bis. Et in poſteriore progreſſione, C A eandem B A ter continet. Denique in ſenſu abſoluto & ſimplici, vt vna Ratio alteram continere dicatur; neceſſe eſt vt maior ipſa ſit; quam ea quæ contineri dicitur. In ſenſu verò multiplicationis, id nullo modo neceſſarium eſt: cum in Ratione minoris inæqualitatis contrarium ſemper contingat. Sit enim progreſſio per Rationes minoris inæqualitatis extenſa A, B, C &c. A 8, B 4, C 2. Ratio C ad A, duplicata eſt Rationis B ad A, & hanc illa bis continet in ſenſu multiplicationis, licet re vera minor ſit. Cum enim vtriuſque ſit

A 2	B 4	C 8
A 3	B 9	C 27

idem Consequens A: Ratio C A ad Rationem B A, ita se habet vt Antecedens C ad Antecedentem B, per Prop. 7. Huius. Sed C ad B habet Rationem subduplam: Ergo etiam in subdupla Ratione est, Ratio C A comparata ad Rationem B A. Nec C A in sensu absoluto vllo modo dici potest continere Rationem B A; in sensu tamen multiplicationis eam bis continere dicenda est.

Hæc de Continentia Rationum mutua hic annotata, quemadmodum & quæ Corollario Propositionis 11. tradidi, sunt accuratè obseruanda, tum quia Rationum per se satis obscurum & tale apud Geometras semper habitum negotium illustrant satis clarè, tum quia maximè necessaria futura sunt ad plurimas lib. 10. Authoris huius Propositiones intelligendas præsertim 44. tantæ obscuritatis, quantæ grauitatis ad eius meúmque institutum vt libro 2. Prop. 47. patebit.

PROP. XXV. THEOR.

Si ab eodem primo termino A, duæ progressiones instituantur A, B, C, D, E; & A, F, G, H, L; duo tertij termini C, & G habent Rationem duplicatam Rationis duorum secundorum B, F: termini verò D, H quarti loci triplicatam. Quinti demum loci termini E, L quadruplicatam eiusdem, & sic deinceps.

Demon

Demonstratio.

	B 2	C 4	D 8	E 16
A 1				
	F 3	G 9	H 27	L 81

Quod ad Quantitatem Continuam pertinet: hanc propoſitionem demonſtrat Geometra noſter lib. 2. Proop. 27. Deducitur quoad numeros ex Propoſitione 10. lib. 8. Euclidis, quæ & ipſa Quantitati Continuæ leui opera accommodari poſſet. Vniuerſaliter eam propono, eáque ad inſtitutum meum vtor. Si ab aliquo termino A duæ ſeries terminorũ continuè Proportionaliũ A, B, C, &c. A F G, &c. Quot inter ſingulos terminos eiuſdem loci, & primũ terminum A cadunt termini medij: tot inter ipſos aſſumptos in vtraque progreſſione terminos medij cadent Proportionales. Verbi gratia, inter teminos B, F, & A, nullus medius Proportionalis eſt terminus: Ergo inter B & F, nullus medius terminus cadet. At verò quia inter terminos C, G tertij loci & terminum A, vnus medius terminus, in vtraque ſerie, ſcilicet B & F, interiicitur: vnus etiam medius Proportionalis cadet inter C & G. Eodem modo de cæteris ratiocinare cum Euclide. Hoc poſito, Propoſitio allata ſic concluditur. Ratio C A, & G A, Rationis B A, & F A duplicata eſt per Prop. 24. huius. Sed inter C & G vnus medius cadit terminus Proportionalis; & quidem in eadem Ratione in qua ſunt termini B, F primo termino A proximi. Vt ex

Euclidis diſcurſu conſtat. Ergo Ratio C ad G duplicata eſt Rationis B ad F. Paríque iure Ratio D ad H eiuſdem Rationis B ad F, erit triplicata. Ratio E ad L quinti loci, Quadruplicata: & ita deinceps. Ergo ſi ab eodem termino &c. Quod erat probandum.

PROP. XXVI. PROBL.

Duabus datis Rationibus tertiam Rationem Proportionalem exhibere.

Conſtructio.

Sint datæ duæ Rationes A 12 ad B 3; & C 8 ad D 6: quibus tertia Ratio Proportionalis adiungenda eſt.

A 12	C 8	E 64	G 192		G 4
				vel	
B 3	D 6	F 36	H 432		H 9

Ducatur Ratio ſecunda CD in ſe, vt fiat Ratio E 64 ad F 36. Hæc diuidatur per primam Rationem AB, quæ diuiſio breuiſſimè inſtituetur iuxta obſeruationem ad Prop. 17. allatam: ſi B 3 ducatur in E 64 vt fiat G 192 Antecedens Rationis futuræ. Cuius Conſequens habetur, ducto A 12 Antecedente in F 36 Conſequentem, vt fiat H 432. Dico ergo Rationem G 192 ad H 432, vel terminis ad minimos reductis, G 4 ad H 9, eſſe tertiam proportionalem ad duas datas Rationes AB & CD.

Demon

Demonstratio.

Solutionis huius facillimæ clara eſt Ratio ex eo quod eadem Ratio producatur per multiplicationem mediæ Rationis C D in ſe: quæ producitur per multiplicationem duarum extremarum A B & G H in ſe inuicem. Ratio enim A B ducta in G H non poteſt non reſtituere Rationem E F, quam diuiſit. Sed eadem E F Ratio producta eſt per multiplicationem C D in ſe: vt habet conſtructio.

Aliter.

Vt hæc mea methodus euidentiùs certiúſque conſtet: iuuat idem problema paulò aliter ſoluere adhibita in numeris Ratione quam in lineis vſurpauit Geometra. Sic ergo eodem ſeruato ſchemate operabimur.

A	12	C	8
B	3	D	6

Duobus terminis C 8 & D 6, tertius proportionalis inueniatur E $4\frac{1}{2}$. Deinde fiat vt C 8 ad E $4\frac{1}{2}$, ita A 12 ad aliud, quod

C 8. D 6. E $4\frac{1}{2}$	C 8. E $4\frac{1}{2}$ A 12 F $6\frac{1}{4}$

ſit F $6\frac{3}{4}$. Erit Ratio B 3 ad F $6\frac{3}{4}$ tertia proportionalis duabus datis Rationibus A B, C D.

Demonstratio.

Ex iis quæ de Rationum compoſitione ſuperiùs tradidi,

didi,

didi, clara euadit huius operationis methodus: vt propterea in hunc locum problema hoc, ſicut & quod proximè ſequitur, reiecerim; quod alioqui alium ordinem poſcere videretur. Cum igitur præcipio vt duobus terminis C & D ſecundæ Rationis, tertius E proportionalis inueniatur: vt habeatur Ratio termini C primi ad tertium E: nihil inquiro niſi Rationem, quam Ratio C D. in ſe ducta producit: qualis fuit Ratio E F in præcedenti ſolutione. Sicut enim Ratio termini C ad E eſt duplicata Rationis C ad D, eò quod ſint tres termini C, D, E continuè proportionales: ita etiam Ratio E F in ſuperiori ſchemate eſt eiuſdem Rationis C D duplicata per 11. lib. 8. Euclidis. Quadrati enim numeri E F duplicatam habet Rationem laterum ſiue Radicum C, D. Ergo etiam Ratio A ad F, cum eadem ſit ex conſtructione cum Ratione C ad E, eſt duplicata Rationis C ad D. Id eſt, eadem eſt cum Ratione producta per multiplicationem Rationis C D in ſe. Quod cum ita ſit & inter terminos A & F interponatur medius terminus B: erit Ratio A ad F compoſita ex Rationibus A ad B, & B ad F: atque adeò Ratio A F diuiſa per Rationem A B producit Rationem B F. Eſt ergo B F tertia Ratio proportionalis: eadem planè cum Ratione E F ſuperiori ſolutione inuenta. Eædem enim oſtenſæ ſunt Rationes E F ſuperior, & Ratio A F huius ſolutionis: & vtraque per eandem Rationem A B diuiditur. Ergo Rationem B F hic inuentam, eandem eſſe neceſſe eſt cum Ratione E F ſuperiùs exhibita. Quod idem numeri ipſi inuenti confirmant. Tertiam

ergo

ergo Rationem datis duabus Rationibus proportionalem exhibui. Quod erat probandum.

PROP. XXVII. PROBL.

Inter duas Rationes A B, C D mediam Rationem proportionalem constituere.

Constructio.

Ostendi superiùs Prop. 23. huius. Quomodo Ratio quælibet data, diuidenda sit in duas aut plures Rationes æquales. Hoc verò problemate quæritur modus tantùm, si rem paulò acutiùs perpendamus, diuidendi datam proportionem in duas similes, vel, quod idem est, in duas æquales proportiones. Ratio enim siue habitudo Rationis A B ad Rationem C D iuxta Prop. 3. huius. Proportio est. Quæ in duas æquales proportiones diuisa fuerit si quædam media Ratio inter Rationes A B, C D posita fuerit proportionalis; id est, eiusmodi, vt proportio inter Rationem A B & ipsam, similis sit vel æqualis proportioni, quæ intercedet inter hanc eandem, & Rationem C D. His ita declaratis, operationem instituemus in hunc modum adhibitis numeris more nostro, quando hoc opusculum totum numerica Ratione exponere institutum est.

Ratio A 9 ad B 8 multiplicetur iuxta Prop. 16. huius. Per Rationem C 4 ad D 2. Fiet Ratio E 36 ad F 16.

A 9	C 4	E 36	G 6	vel	G 3
B 8	D 2	F 16	H 4		H 2

Eruatur ex terminis E & F Radix Quadrata. Erit illa Radix G 6 & H 4. Horum ergo terminorum 6. 4. vel 3. 2. Rationem dico esse mediam proportionalem inter datas Rationes A B, C D, hoc est, iuxta expositionem paulò ante allatam: Dico proportionem Rationum A B, C D in duas proportiones æquales A B, G H, & G H, C D diuisam esse.

Demonstratio.

Cum proportio Rationis A B, ad Rationem C D, Rationis species quædam sit, (est enim Ratio Rationum duarum) & inter terminos A B primum, & C D. Secundum Rationis illius, medius terminus statuatur Ratio G H: componetur proportio Rationis A B ad Rationem C D, ex proportione Rationis A B ad Rationem G H. Et ex proportione Rationis G H ad Rationem C D, iuxta Propos. 22. huius. Ostendendum itaque tantùm restat, duas illas proportiones esse æquales. Quod ita colligetur. Ratio media G H in se ducta producit Rationem E F (est enim G H Radix quadrata Rationis E F) quam eandem produxêre Rationes A B, C D in se ductæ ex constructione. Ergo Ratio G H est media proportionalis inter Rationes A B, C D. Tanquam G H vnicus foret simplex terminus inter duos simplices A B, &

C D

C D vnius ſimplicis Rationis, cuius A B ſit Antecedens & C D Conſequens: quæ diuidatur per Prop. 23. huius. In duas Rationes æquales medio interpoſito termino G H.

Quod vt euidentiùs pateat reducantur termini harum Rationum ad alios, itavt ſit omnium idem Conſequens: Erit A 9 & B 8: at C erit 16 & D iterum 8. Si ergo omiſſis Conſequentibus B 8 & D 8. Soli ſpectentur Antecedentes A 9 & C 16, qui ſunt Rationum quantitates ſiue denominatores, vt docetur Propoſ. 7. huius. Eorum Ratio in duas æquales diuidetur, interpoſito medio termino proportionali G 12 per Prop. 23. huius. Qui terminus habetur, vt ibidem traditur, ductis inuicem A 9 & C 16; & ex producto 144, eruta Radice quadrata 12; ad quem medium terminum, eamdem habet Rationem primus 9 quam ipſe medius deinceps habet ad 16. At eadem eſt Ratio horum Antecedentium 9. 12. 16. Quorum idem eſt Conſequens 8. Quæ eſt inter ipſas Rationes 9 ad 8, 12 ad 8, 16 ad 8 per Prop. 7. huius. Siue inter Rationes illis æquales A 9 ad B 8: G 6 ad H 4: C 4 ad D 2. Ergo inter duas Rationes datas AB, C D rectè interpoſita eſt Ratio proportionalis media G H. Quod erat præſtandum.



LIBER SECVNDVS.

In quo primæ Quadraturæ examen inſtituitur & abſoluitur.

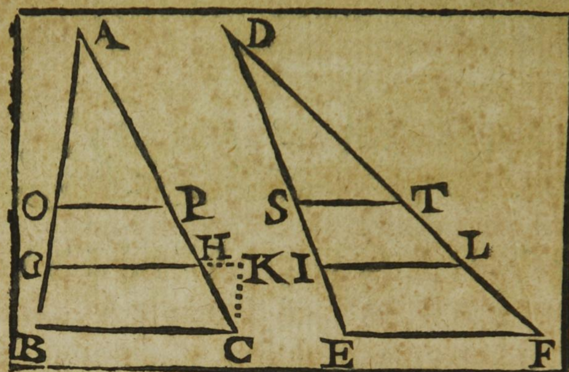
PROP. I. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF æqualibus Baſibus BC, EF inſiſtant: latera verò AB, DE ſimiliter ſecentur in G & I: & per G & I agantur lineæ GH, IL Baſibus Parallelæ. Dico GH, IL æquales eſſe.

Demonſtratio.

Vt AB, ad AG; ita ex hypotheſi DE ad DI. Sed vt AB ad AG, ita BC ad GH per 4. lib. 6. Ergo vt DE ad DI, id eſt per eandem Prop. EF ad IL: ita BC ad GH. Sed BC, EF ſunt æquales. Ergo per 14. lib. 5. *Fig. 1.*

Figura prima.



æquales etiam ſunt G H, I L. Quod erat demonſtrandum.

RROP. II. THEOR.

Si duæ lineæ parallelæ B C, G H, inæquales inter ſe, duabus lineis parallelis E F, I L æquales fuerint ſingulæ ſingulis. Quarum vtrarumque extrema iungantur lineis B G, C H; & E I, F L, conuenient iunctæ lineæ; & ſimiliter ſecabuntur in G & I, vel H & L.

Præparatio.

Fig.1. Poducatur G H, vt fiat G K, æqualis B C & iungatur C K.

Demonſtratio.

Erit C K iungens duas æquales lineas & parallelas G K & B C; æqualis & parallela lineæ B G per 33. lib.1.

Atque

Atque adeò anguli duo G B C, B C K æquales erunt duobus rectis per 29. lib. 1. Ergo duo GBC, HCB minores erunt duobus rectis. Lineæ ergo B C, C H productæ conuenient per 13. A X I. lib. 1. Pari modo conuenient productæ lineæ E I, FL; conueniant illæ in A, iſtæ in D. In triangulis igitur A B C, D E F, ita eſt A B ad A G, vt B C ad G H: & D E ad D I, vt E F ad I L; hoc eſt, vt B C ad G H; atque adeò, vt A B ad A G. Similiter ergo ſecantur A B, D E, in G & I; & A C, D F; in H, & L. Quod erat probandum.

PROP. III. THEOR.

Si duo Trapezia G C, I F. Oppoſitis duabus lineis G H, B C; & I L, E F parallelis, & æqualibus contenta, æqualia ſint. Dico vtriuſque eandem eſſe altitudinem. Quod ſi vtriuſque eadem ponatur altitudo. Dico ambo eſſe inter ſe æqualia.

Præparatio.

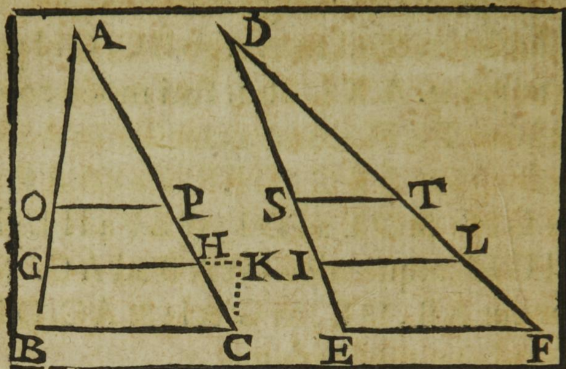
Producantur latera reliqua Trapeziorum, nempe B G, C H donec conueniant in A (conuenient enim per Prop. præcedentem) & E I, F L, donec etiam concurrant in D.

Demonſtratio.

Per Prop. præcedentem latera A B, D E triangulorum A B C, D E F, ſimiliter ſecantur in G & I. Ergo per 22 lib. 6. Vt triangulum A B C, ſuper primam A B *Fig. 1.*

quatuor

Figura Prima.



quatuor proportionalium, ad triangulum A G H ſimile ſuper ſecundam A G. Ita triangulum D E F ſuper tertiam D E; ad triangulum D I L ſimile ſuper quartam D I. Ergo Diuidendo. Vt Trapezium B H, ad triangulum A G H: ita Trapezium E L ad triangulum D I L. Sed Trapezium B H æquale eſt Trapezio E L ex hypotheſi. Ergo per 14 lib. 5. etiam triangulum A G H, æquale eſt triangulo D I L. Quorum triangulorum cum æquales ſint ex hypotheſi baſes G H, I L: in eadem erunt altitudine. Sed æqualia etiam ſunt triangula A B C, D E F (adiectis nimirum Trapeziis æqualibus) ſuper æquales baſes B C, E F. Ergo & horum triangulorum æqualis erit altitudo. Si igitur ab hac vtraque altitudine æquali, dematur altitudo æqualis triangulorum A G H, D I L: remanebit altitudo Trapeziorum G C, I F æqualis. Vt habet prior pars propoſitionis.

Secunda verò pars, quæ prioris eſt conuerſa, ita probatur. Facta conſtructione, conueniunt B G, C H latera

latera Trapezij G C producta, in A: & latera E I, F L Trapezij I F producta, in D: & præterea ſimiliter ſecantur latera A B, D E, in G, & I. Ergo ita eſt triangulum A B C ſuper primam A B quatuor proportionalium, ad triangulum ſimile A G H ſuper ſecundam A G: ſicut triangulum D E F ſuper tertiam D E ad triangulum ſimile D I L ſuper quartam D I.

Et Permutando. Ita eſt triangulum A B C ad triangulum D E F: vt triangulum A G H ad triangulum D I L. Sed vt triangulum A B C ad triangulum D E F: ita eſt altitudo trianguli illius ad huius altitudinem, cum eorum baſes B C, & E F ponantur æquales; Et propter eandem rationem: ita eſt triangulum A G H ad triangulum D I L: vt illius altitudo ad huius altitudinem, propter baſes G H, I L æquales. Ergo cum ſit vt tota altitudo trianguli A B C; ad totam altitudinem trianguli D E F; ita ablata altitudo trianguli A G H; ad ablatam altitudinem trianguli D I L. Erit reliqua altitudo, Trapezij ſcilicet G C, ad altitudinem reliquam Trapezij I F: vt tota ad totam; & vt ablata etiam ad ablatam per 19. lib. 5. Sed altitudo Trapezij G C æqualis eſt altitudini Trapezij I F ex hypotheſi. Ergo tam altitudo trianguli A B C, altitudini trianguli D E F; quam altitudo trianguli A G H, altitudini trianguli D I L, æqualis eſt. Sed baſis B C baſi E F, & baſis G H baſi I L, ponuntur æquales. Ergo tam triangulum ABC triangulo DEF; quam triangulum AGH, triangulo D I L æquale eſt per 1. lib. 6. Si ergo ab æqualibus triangulis A B C, D E F, demantur triangula *Fig. 1.*

 æqualia

æqualia A G H, D I L, æqualia remanebunt Trapezia G C, I F. Vt habet ſecunda pars propoſitionis. Si ergo duo Trapezia, &c. Quod erat concludendum.

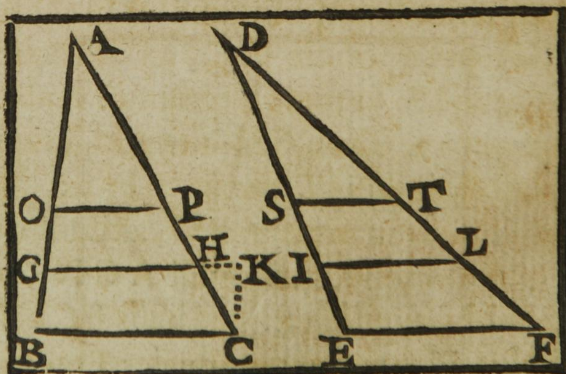
PROP. IV. THEOR.

Si duo Trapezia O C, S F; duobus lateribus parallelis O P, B C; & S T, E F conſtent; quorum vnum O P, vni S T: alterum B C, alteri E F ſit æquale: & ſecentur alia duo eorum latera O B, S E ſimiliter in G & I: per quæ puncta ducantur G H, I L parallelæ lineis B C, E F. Dico parallelas G H, I L æquales eſſe.

Præparatio.

Producantur B O, C P; & E S, F T donec illæ in A, iſtæ in D concurrant (concurrent enim per Prop. 2. huius.)

Figura prima.



Demonſtratio.

Fig. 1. In triangulo A B C, cum O P ſit baſi B C parallela; ita eſt A B ad O B; vt in triangulo D E F linea D E ad

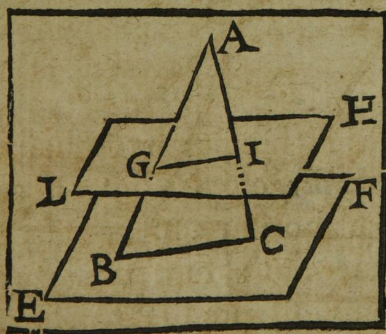
S E.

SE. Per Prop.2. Huius. Sed vt OB ad GB; ita eſt ex hypotheſi SE ad IE. Ergo ex æquo, vt AB ad GB; ita eſt DE ad IE. Et Conuertendo. AB ad AG vt DE ad DI. Sed vt AB ad AG; ita eſt BC ad GH: & vt DE ad DI; ita EF ad IL. Ergo ita eſt BC ad GH; vt EF ad IL. Sed BC & EF ſunt æquales. Ergo & æquales erunt GH, IL. Per 14. lib. 5. Quare ſi duo Trapezia, &c. Quod erat probandum.

PROP. V. THEOR.

Si à ſublimi puncto A, in ſubiectum planum EF, rectæ lineæ quæcunque & quotcunque, vt AB, AC demittantur. Ducatur verò planum LH plano FE parallelum, lineas AB, AC ſecans in G & I. Dico lineas AB, AC ſimiliter ſecari in G & I.

Figura Secunda.



Præparatio.

Iungantur tam puncta B, C; quam puncta G, I, rectis lineis BC, GI. *Fig.2.*

Demonstratio.

Triangulum ABC per 2. lib. 11. in vno est plano sed illud planum secat duo plana parallela EF, LH. Ergo sectiones communes producit BC, GI parallelas per 16. lib. 11. Ergo trianguli ABC latera AB, AC secta sunt proportionaliter in G & I. eadem est reliquarum linearum à puncto A ad idem planum demissarum Ratio. Quare si à sublimi &c. Quod erat probandum.

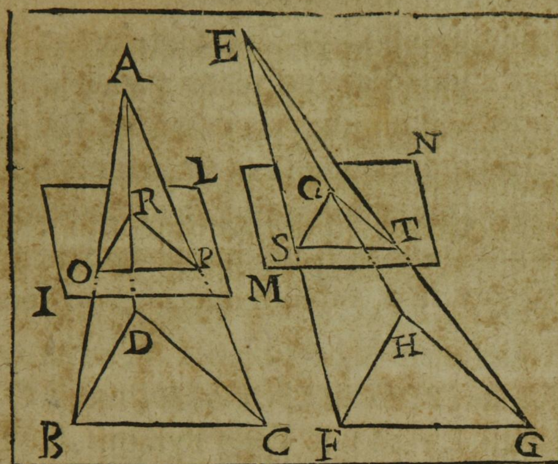
PROP. VI. THEOR.

Si Pyramides triangulares, quarum vertex A, & E; bases BDC, FHG æquales habeant & similes. Secentur autem planis IL, MN basi parallelis, quæ latera Pyramidum similiter secent in O, R, P; S, Q, T. Dico communes sectiones ORP, SQT, esse triangula æqualia & similia.

Demonstratio.

Fig. 5. Plana IL, MN sunt ex hypothesi, Pyramidum basibus parallela. Ergo per 16. lib. 11. communes sectiones eorum planorum cum singulis triangulis Pyramidem continentibus, sunt parallelæ singulis triangulorum basibus. Quare OP parallela est basi BC trianguli ABC: & ST parallela basi FG trianguli EFG. Et ita de cæteris triangulis. Quia verò ex hypothesi, latus AB trianguli ABC; & latus EF trianguli

Figura Tertia.



guli E F G, secantur similiter in O & S. Erunt æquales lineæ O P & S T per Prop.1. huius. Pari modo æquales erunt O R, S Q; & P R, T Q. Ergo per 5. lib. 6. triangula O R P, S Q T æqualia sunt & similia inter se. Quod erat probandum.

PROP. VII. THEOR.

Eadem facta suppositione. Positis scilicet duabus Pyramidibus A B D C, E F H G triangularibus: quæ basibus æqualibus & similibus B D C, F H G insistant. Sectis etiam earum lateribus similiter in O & S, vel in R & Q, aut in P & T per plana I L, M N basibus parallela. Dico ipsas etiam Pyramides per eadem plana similiter secari.

Demonstratio.

Fig. 3. Cum planum ſecans I L parallelum ſit baſi Pyramidis B D C: abſcindet Pyramidem A O R P. Similem toti Pyramidi A B D C. Per Definit. 9. lib. 11. Siquidem plana omnia Pyramidem vnam continentia ſimilia ſunt planis omnibus alteram continentibus. Similiter Pyramis ESQT abſciſſa ſimilis eſt toti Pyramidi EFHG. Ergo Pyramis A B D C ad Pyramidem A O R P. Triplicatam Rationem habet lateris A B, ad latus homologum A O per 8. lib. 12. Sed vt A B ad A O; ita eſt ex hypotheſi E F ad E S. Ergo Pyramis A B D C, ad Pyramidem A O R P habet triplicatam Rationem lateris E F ad E S. Sed Pyramis E F H G ad Pyramidem E S Q T, habet etiam triplicatam Rationem lateris E F ad E S. Ergo ambæ Pyramides A B D C, EFHG ſimiliter ſecantur à planis I L, M N quæ ſimiliter ſecant latera Pyramidum. Quod erat probandum.

Corollarium.

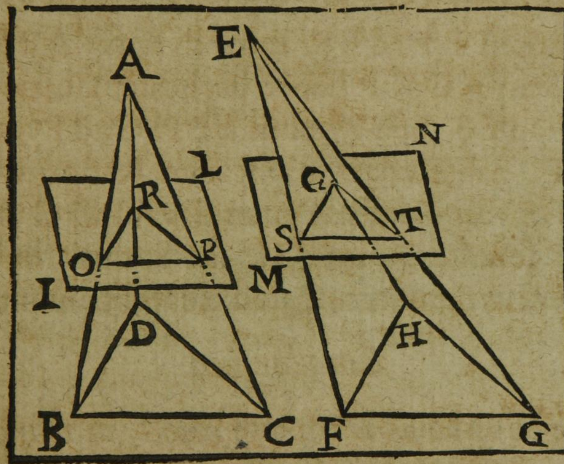
Hinc fit ſeruata eadem hypotheſi, vt truncatæ Pyramides, inter baſes, & plana ſecantia interceptæ, etiam ſint ad totas Pyramides ſuas, proportionales; & Permutando. Vt Pyramis ad Pyramidem; ita truncata Pyramis ad Pyramidem truncatam. Quò fit vt ſi Pyramides ſint æquales; æquales etiam futuræ ſint huiuſmodi truncatæ Pyramides.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

Duo triangula B D C, O R P ſimilia in ſitu parallelo ſimiliter ponantur. Sit verò O R P altero minus. Si bini & bini anguli æquales B,O : D R; C, P, lineis rectis connectantur. Dico has omnes lineas productas ad vnicum punctum A concurſuras, ad partes minoris trianguli : & Pyramidem efformaturas.

Figura Tertia.



Demonſtratio.

Duæ lineæ B C, O P ſunt parallelæ. Et O P minor eſt ex hypotheſi quam B C. Ergo iunctæ lineæ B O, C P, ſi producantur, coibunt ad partes lineæ O P per Prop.2. huius, verbi gratiâ in puncto A. Rurſus quia in triangulo A B C, ducta eſt O P, baſi B C, parallela : erit *Fig.3.*

A B

AB ad AO, vt BC ad OP. Sed vt BC ad OP; ita est BD ad OR, (eo quod duo triangula BDC, ORP, similia ponantur.) Ergo ita est BD ad OR, vt AB, ad AO. Si igitur DR producatur transibit per A. Atque ita fient tria triangula ABC, ABD, ADC; quæ super basi BDC, constituta, colliguntur ad punctum A, & Pyramidem formant. Quod erat probandum.

PROP. IX. THEOR.

Si duæ Pyramides basi Polygonæ, æquali & simili insistant (cuiusmodi sunt Pyramides tetragonæ ABCDE, FGHKI) quarum latera secentur similiter in M,N,I,L; & P, R, T, V à planis ML, PV basibus parallelis. Dico figuras à planis secantibus factas nempe MILN, PTVR esse æquales & similes.

Præparatio.

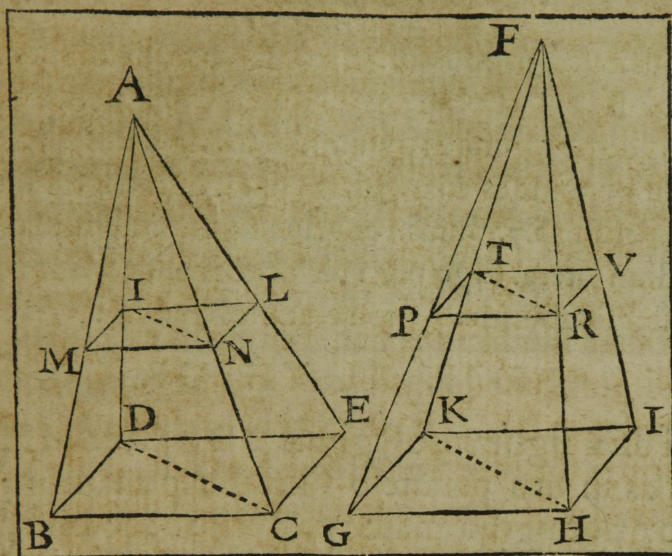
Fig. 4. Ducantur lineæ DC, KH distribuentes Pyramidum bases in triangula inter se æqualia & similia & similiter posita: qualia sunt BDC, GKH; & DCE, KHI. Intelligantur verò per lineas DC, KH & Pyramidum vertices AF; extendi plana Pyramides polygonas in duas Pyramides distribuentia.

Demonstratio.

Cum ergo duæ pyramides triangulares ABDC, & FGKH, æquali basi & simili BDC, GKH insistant. Secentur verò earum latera AB, FG, similiter in M

&

Figura Quarta.



& P à planis M L , P V basi parallelis: erit per Prop. 6. huius. Triangulum M I N , æquale & simile triangulo P T R. Eodem modo triangulum alterum I L N , erit æquale & simile triangulo T V R, & similiter positum. Ex quibus triangulis æqualibus, similibus, & similiter positis formatur figura polygona M I L N æqualis & similis figuræ polygonæ P T V R. Quæ demonstratio in pyramidibus tetragonis allata, cum vim eandem obtineat in quibuscumque polygonis: patet quod si duæ pyramides polygonæ, &c. Quod erat probandum.

PROP. X. THEOR.

Facta eadem suppositione. Dico ipsas pyramides polygonas similiter secari à planis ML, PV.

Demonstratio.

Fig.4. Distributis basibus in triangula æqualia & similia: nempe BDC, DCE; & GKH, KHI, atque tota pyramide polygona in pyramides triangulares. Probabuntur pyramides triangulares binæ & binæ similiter secari per Prop.7. Huius. Per plana similiter secantia pyramidum latera. Ergo per 12.lib.5. totæ ipsæ pyramides similiter secabuntur. Quod erat probandum.

PROP. XI. THEOR.

Si duæ figuræ polygonæ BDEC; & MILN similes in situ parallelo similiter ponantur; sit verò prior figura maior posteriore: & bini, & bini earum anguli B, M; D, I, &c. Lineis rectis Fig.4. connectantur. Dico has omnes lineas productas ad vnicum punctum A concursuras ad partes minoris figuræ, & pyramidem polygonam efformaturas.

Demonstratio.

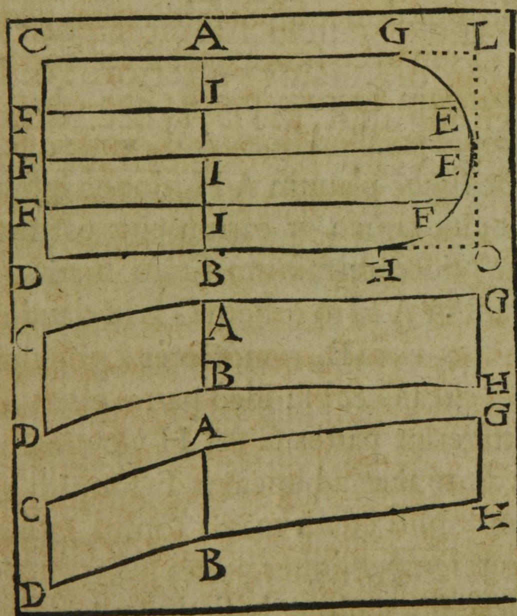
Quod Prop.8. de pyramide triangulari asserui: hic de qualibet polygona pyramide asserendum probo: idque repetita illius propositionis demonstratione. Si enim vtraque hæc figura polygona BDEC, MILN in triangula similia dissoluatur. Fient multæ pyramides triangulares per citatam Prop.8. Quæ vnicam pyramidem polygonam componunt. De qua verè asseritur; quidquid de singulis asserebatur.

PROP.

PROP. XII. DEFINIT.

Ductus plani in planum, eſt corporis, ſiue ſolidi alicuius efformatio: quæ abſoluitur dum planum aliquod alteri plano ad rectos angulos inſiſtens ſupra eiuſdem baſim; in eo ſitu fluere per ipſum concipitur, donec eiuſdem terminum oppoſitum attigerit. Siue, eſt corporis efformatio, quæ fit dum plani recti ad alterum planum, lineæ omnes in omnes lineas ſubſtrati plani ducuntur. Fig. 4.

Figura Quinta.



EXPOSITIO.

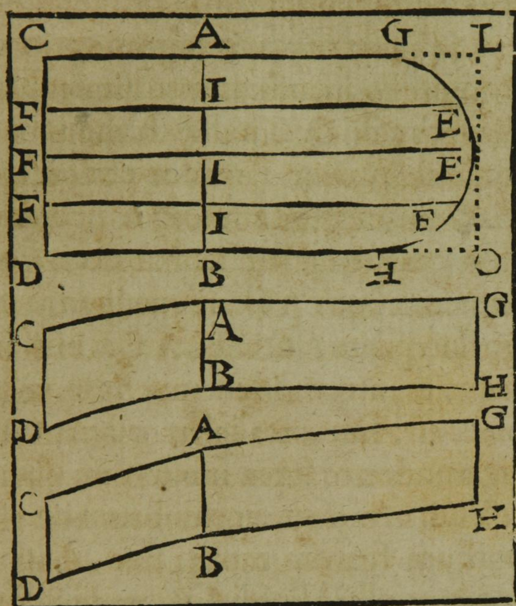
Noua eſt hæc de mutuo planorum ductu doctrina, Fig. 5.

ſolertiſſimè à ſummo vbique Geometra noſtro adinuenta & fuſiſſimè explanata toto libro ſeptimo operis ſui Geometrici. Vnde miras corporum variorum inter ſe comparationes & inauditas æqualitates; atque ipſam adeò ſuam circuli Quadrandi Rationem colligit. Quam, cum mihi planam facere & perſpectam, hac, animi gratia, exercitatione ſuſcepta, propoſuerim; haud dubium quin quædam in hac noua Geometria obſeruanda fuerint; quæ paucis expediam.

Sint ergo duo plana A C D B. A G E H B: quorum baſes ſint æquales; atque adeò aptæ vt in vnam coïre poſſint, qualis eſt A B. circa quam planum A D conuerti intelligatur, donec ſupra ſubſtratum planum A H rectum ſit. Tum in eo ſitu, æquabiliter hoc eſt, æquali omnium partium ſuarum motu; ſiue, baſi ſua A B
Fig. 5. fluente ſemper parallelâ lineæ A B, vnde diſceſſit, ferri concipiatur ſuper planum A H, donec ipſum totum percurrerit; ita tamen vt earum eius partium motus ceſſet, quæ priores terminum ſuum fuerint aſſecutæ. Vt quia planum A H in orbem G E H clauditur: ſuntque partes eius circa E, remotiores à principio motus A B; quam circa G & H: Ideò partes plani A D fluentis, vbi attigerint partes G vel H viciniores, moueri deſinant: dum aliæ ad metam E longius diſtantem contendunt. Niſi etiam mauis totum ipſum planum A D moueri ſemper donec partes plani A H remotiſſimas exceſſerit, eiuſque baſis locum occuparit L O parallelum principio motus A B. Sed tunc nulla eſt habenda ratio corporis illius, quod extra planum AGEHB

excurrit

Figura Quinta.



excurrit vſque ad L & O. Hoc ergo motu abſoluto; efformatum eſt ſolidum ſuper planum A G E H B, quod aliud non eſt quam veſtigium plani fluentis A D, ſuper plano ſubſtrato AH. Illud idem corpus hoc etiam modo concipi poteſt efformari, vt propoſuit Geometra, concipiantur omnes lineæ I F plani A D, duci in ſibi adhærentes lineas I E, plani A H, ſiue ſint aliæ aliis longiores ſiue non. Fient enim hoc modo parallelogramma infinita, quorum latera ſunt I F, I E; quæ corpus conſtituent (ſi corpus conſtare indiuiſibilibus concedatur) illud idem, quod ego per fluxum generari fingebant.

Hic porrò obſerua ad corporum eiuſmodi efformationem,

tionem, me ſemper quidem ſupponere, vt planum fluens ſit ad planum ſubiectum perpendiculare ſuper ipſius latus vnde motus incipit, (quanquam & aliter poſſit huiuſmodi motus iniri poſitis planis oblique ſe mutuo ſecantibus; ſed eiuſmodi efformatio mihi mi-
Fig.5. nime futura eſt neceſſaria) ipſas tamen lineas non opus eſt eſſe perpendiculares ad communem baſim, vnde planum rectum mouetur. Vt habet figura ſecunda in qua parallelogrammum A D, rectangulum non eſt: eiuſque lineæ I F oblique incedunt ſuper lineas I E perpendiculares ad Baſim communem A B. Quo motu generatur corpus, ſiue parallelepipedum obliquum. In tertia verò figura tam lineæ motæ I F, quam lineæ I E, ſuper quas illæ mouentur; ad baſim communem A B ſunt obliquæ: nihilo tamen minùs, corpus eo modo producitur. Quod hic obſeruaſſe oportuit, ad faciliorem quorundam intelligentiam, quæ inferius venient proponenda.

PROP. XIII. THEOR.

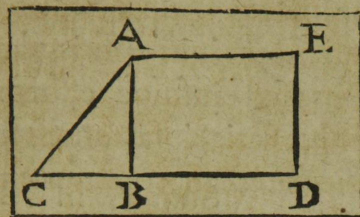
Triangulum A B C ductum in parallelogrammum A D. Generat Priſma triangulare.

Demonſtratio.

Fig.6. Nam latus B C trianguli fluens ſuper B D generat parallelogrammum. Latus A C parallelogrammum item producit; dum eius extremum A decurrit totam A E; & alterum extremum C, ſemper cohæret extremo C lineæ B C dum mouetur. Duæ verò facies op-

poſitæ

Figura Sexta.



poſitæ ſuper A B & D E ; ſunt duo triangula parallela æqualia triangulo A B C. Ergo ex eo ductu generatur Priſma triangulare. Vt propoſitum eſt.

RROP. XIV. THEOR.

Triangulum A B C in triangulum A B D ductum generat Pyramidem ; cuius Baſis eſt parallelogrammum ſub lateribus B C , B D triangulorum , contentum.

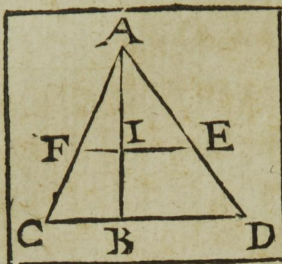
Præparatio.

Ducatur à quocunque puncto I, baſis A B communis , linea I F lateri B C ; & linea I E , lateri B D parallela.

Demonſtratio.

Dum B C erecta mouetur ſuper B D per motum trianguli A B C ; linea I F mouetur ſuper I E : & vtraque figuram parallelogrammam deſcribit , eo quod puncta ſublimia C & F , dum mouentur , æqualiter ſemper diſtent à ſubiectis lineis B D & I E ; & lineas eiſdem *Fig. 7.*

Fig. 7.



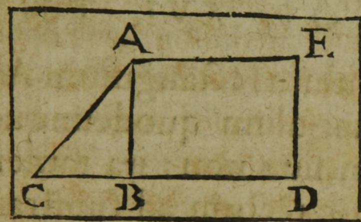
eiſdem parallelas hoc modo deſcribant. Sunt etiam Proportionales huiuſmodi lineæ. Nam vt A B ad A I; ita eſt B C ad I F in triangulo A B C: & ita etiam B D ad I E in triangulo A B D. (Sunt enim I F, I E parallelæ lineis B C, B D ex conſtructione) ergo vt B C, ad B D; ita I F ad I E. Sed anguli etiam lineis B C, B D; & lineis I F, I E contenti ſunt æquales per 10. lib. 11. ſunt enim lineæ I F, I E lineis B C, B D in ſuo ſitu erectæ, parallelæ; & non in eodem plano. Cum ergo duo latera B C, B D ad ſe recta, duobus lateribus I F, I E ad ſe rectis ſint Proportionalia circa æquales angulos rectos; & latera oppoſita, his ſint æqualia in parallelogrammis, ſicut & anguli oppoſiti æquales ſunt per 34. lib. 1. Similia erunt illa parallelogramma per definit. 1. lib. 6. Sed & ſimiliter ſunt poſita. Ergo per Prop. 8. Huius. Lineæ omnes coniungentes binos & binos huiuſmodi ſimilium parallelogrammorum angulos, conuenient in vnum punctum, ſi producantur: & quidem in punctum A I in quo iam duæ B I, D E coniungentes angulos B & I; D & E, productæ conueniunt; & Pyramidem efformabunt. Cuius baſis erit parallelogrammum ſub lateribus B C. B D comprehenſum. Quod erat probandum.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

Si triangulum quodcunque A B C, Rectum ſit ad planum A D rectangulum, in quod ducatur. Fiet Priſma triangulare per 13. Huius. Dico tres eius hedras fore rectangula, recta, ad oppoſita triangula.

Figura Sexta.



Demonſtratio.

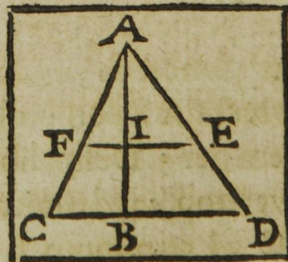
Quodcunque enim ſupponatur triangulum A B C, hoc eſt ſiue rectangulum ſit, ſiue obliquangulum: cum eius planum ſupponatur rectum ad planum A D: erit recta B D, quæ perpendicularis eſt ad A B ſectionem communem planorum, etiam perpendicularis ad rectam B C; & recta A E perpendicularis ad A C in eo plano exiſtentem per 3. Defin. lib. 11. Sed motus ſitum non mutat, vt Prop. 12. definitum eſt. Ergo cum triangulum A B C ad terminum E D peruenerit: & duæ lineæ C B, C A duo parallelo gramma deſcripſerint; adhuc tunc erunt A E, B D, Orthogonæ ad lineas C A, C B. Quare duo illa parallelogramma erunt rectangula. Tertium verò A D ex hypotheſi rectangu- *Fig. 6.*

lum eſt. Sunt autem tria illa rectangula, ad duo oppoſita triangula, recta: quia recta ſunt ad triangulum A B C in ſuo primo ſitu ante motum: ſed idem triangulum poſt motum, & ſuper E D conſtitutum parallelum eſt triangulo A B C ante motum. Ergo tria illa rectangula ad vtrumque triangulum recta ſunt. Quare ſi triangulum quodcumque A B C rectum ſit ad planum A D, &c. Quod erat probandum.

PROP. XVI. THEOR.

Sit triangulum rectangulum A B D; in quod ducatur triangulum quodcunque A B C ſiue rectangulum ſiue non; ita tamen vt ante fluxum ſtatuatur rectum ad ſubſtratum triangulum A B D. Dico Pyramidem, quæ per Prop. 14. Huius. Ex eo ductu generatur, baſim habere rectangulam.

Figura Septima.



Demonſtratio.

Fig. 7. Cum planum ABC rectum ponatur ad planum ABD; ponatur etiam recta BD perpendicularis ad

communem eorum ſectionem AB (ponitur enim triã-gulum A B D rectangulum) erit B D per Defin.4. lib.11. Ad lineam B C in plano A B C exiſtentem recta. Cum igitur dum mouetur B C, eundem ſemper ſitum ad B D ſuper quam mouetur obſeruet: parallelogrammum, quod ab ipſa deſcribitur, rectangulum eſſe neceſſe eſt. Vt aſſerit propoſitio.

Corollarium.

Hinc fit, vt, ſi duæ lineæ C B fluens, & B D manens, ſint æquales; rectangulum ab ipſis deſcriptum, Quadratum ſit. Quadrata etiam ſint rectangula, quæcumque deſcribuntur à lineis I F fluentibus ſupra immotis I E. Sunt enim omnia parallelogramma, harum linearum ductu deſcripta, ſimilia parallelogrammo baſeos. Vt ſupra Prop.14. huius, expoſui. *Fig.7.*

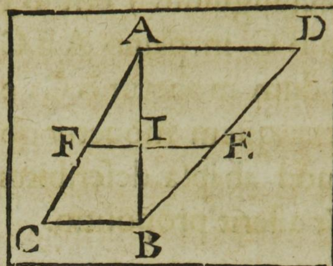
PROP. XVII. DEFINITIO.

Ductus trianguli Orthogoni in triangulum Orthogonum, vel in ſeipſum, ſubalterne: eſt cum anguli recti ad baſim communem poſiti, ſunt alterni: & ita alterum in alterum ducitur.

EXPOSITIO.

Sit triangulum Orthogonum A B C: ad cuius latus A B apponatur alterum triangulum Orthogonum A B D, vel æquale triangulo A B C, vel ab eo diuerſum, ita vt angulus eius rectus, non ſit deinceps poſi- *Fig.8.*

Figura octaua.



tus angulo recto A B C: ſed ei ſit alternus intra parallelas A D, B C; ſi igitur in eo ſitu triangulum A B C ducatur in triangulum B A D: ductus ille ſubalternus dicitur.

PROP. XVIII. THEOR.

Duo triangula Orthogona A B C, B A D ſubalterne poſita in ſe ducta, Pyramidem generant: Cuius altitudo eſt latus B C trianguli fluentis: baſis verò eſt triangulum alterum B A D, ſuper quo motus alterius exercetur. *Fig.8.*

Demonſtratio.

Tota demonſtratio, apta tantùm conceptione motus trianguli A B C ſuper alterum nititur. Si ergo triangulum A B C conuerti intelligatur circa A B donec rectum ſit ad planum alterius trianguli B A D, in quo ſitu ſtatui debet ad motum ineundum. Tunc per Defin. 3. lib. II. patet lineam B C rectam eſſe ad planum trianguli B A D. Patet etiam ipſam non moueri; quia nullum ei ſpatium decurrendum ſuppetit: patet deni- *Fig.8.*

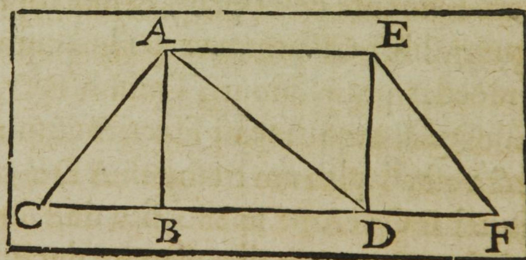
que

que ipſum triangulum A B C in eo recto ſitu, eſſe latus vnum futuræ pyramidis: punctum verò A decurrere debet lineam A D, eique perpetuò adhærere; eò quod omni careat altitudine. At ſi ducantur lineæ intermediæ I F, I E; illa quidem in plano trianguli A B C erecti, hæc in plano iacentis trianguli A B D: erit I F ad I E perpendicularis per 4. Defin. lib. 11. Et I F ſuper I E fluens deſcribet parallelogrammum rectangulum; eritque eius latus ſuperiùs, deſcriptum à puncto F fluente, parallelum lineæ A D per 9. lib. 11. (vtraque enim eſt lineæ I E parallela) planum ergo ducitur per lineam illam à puncto F fluente deſcriptam, & lineam A D illi parallelam per 7. lib. 11. Planum verò illud cum à linea A F C non recedat per 1. lib. 11. Tranſibit per elatum punctum C. Quia verò linea I F terminum ſuum E aſſecuta, recta eſt ad planum trianguli A D B, ſicut ad ipſum recta eſt B C: erunt in illo ſitu duæ lineæ illæ inter ſe parallelæ. Ergo per illas planum ducitur per 7. lib. 11. In quo eſt linea B D per 1. lib. 11. Tranſibit ergo per D. Séque mutuò ſecabunt, planum hoc, & planum paulò ante deſcriptum, quod per A D & punctum C ſublime extendi probauimus. Cum ergo ab vno plano, triangulo ſcilicet A D B, tria plana à tribus eius lateribus educantur; & ad vnicum punctum C ſublime terminentur. Pyramis eſt corpus illud per Defin. 12. lib. 11. Cuius altitudo eſt B C; cum ſit à vertice C pyramidis, ad planum eius baſis A B D, perpendicularis. Duo ergo triangula Orthogona, &c. Quod erat probandum. *Fig. 8.*

PROP. XIX. THEOR.

Triangulum Orthogonum A B C ductum in rectangulum A D; Prisma triangulare generat ex Prop. 13. Huius. Dico Prisma huiusmodi æquale esse Pyramidi ortæ ex triangulo A B C in triangulum A B D, (ductâ diametro A D, rectanguli) & Pyramidi simul quæ generatur ex eodem triangulo A B C, in idem triangulum A B D subalterne positum ducto.

Figura Nona.



Præparatio.

Fig. 9. Producatur B D, & fiat D F æqualis lineæ B C & iungatur E F. Erit triangulum E D F æquale triangulo A B C, per 4. lib 1. cui subalternè ponitur triangulum A E D æquale triangulo A B D. Probandum ergo est Prisma illud triangulare, de quo agit Propositio, æquale esse piramidi ortæ ex ductu trianguli A B C in triangulum A B D, & simul pyramidi, ortæ ex triangulo E D F ducto in triangulum subalternè positum D E A.

Demonstratio.

Concipiatur Prisma triangulare, quod ex ductu trianguli

trianguli Orthogonij A B C in rectangulum A D, generatur iuxta citatam Prop.13. Huius. Diuidi plano secante super rectanguli diametrum A D, ducto ad ipsum rectangulum perpendiculariter. Duæ ex hac diuisione Pyramides generabuntur: quarum altera, eadem ipsa est, quæ oritur ex ductu trianguli A B C in triangulum rectangulum A B D; cuius basis est quadrilatera, rectangulum scilicet sub lateribus B C, B D contentum: ex qua enascuntur triangula quatuor ad verticem A conuenientia iuxta Prop. 14. Huius. Altera verò Pyramis è Prismatis diuisione, producta; est ea, quam idem triangulum A B C Prisma generans, producit; dum triangulum A E D decurrit, facto motus initio ab ipso angulo A, in quo duo triangula A B C, A E D sibi adhærent: eodémque triangulo A B C, suum semper situm erectum retinente, vsque ad latus E D rectanguli, siue trianguli A E D promoto. Sed hæc Pyramis illa ipsa est, quæ à triangulo E D F, quod æquale positum est triangulo A B C, generatur, dum in triangulum A E D sibi subalternè positum ducitur: perinde enim est, siue triangulum A B C in suo situ moueatur super triangulum A E D initio motus facto ab angulo A, motúque terminato in latere E D: siue triangulum E D F moueatur super idem triangulum A E D subalternum, motus initio in latere E D, & fine, in angulo A, constituto: hæc enim motus diuersitas, in sola ipsius mutatione quoad initium & finem, constituta, nullum discrimen in solidi generationem potest inuehere. Patet ergo quomodo Prisma triangulare ex ductu *Fig.9.*

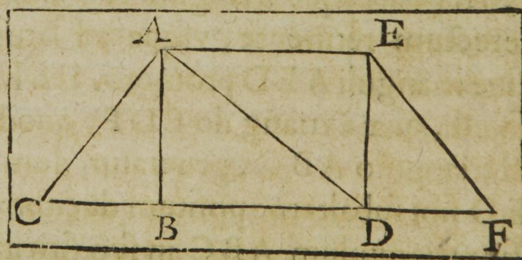
trianguli

trianguli A B C in rectangulum A D, efformatum, æquale ſit duabus Pyramidibus: quarum vna oritur ducto triangulo A B C, in triangulum A B D deinceps poſitum; altera verò ducto eodem triangulo A B C in locum trianguli E D F tranſlato, in triangulum A E D ſubalternè poſitum. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XX THEOR.

Eadem facta ſuppoſitione Priſmatis triangularis: eiúſque in duas partes diuiſionis, de qua propoſitione præcedenti. Dico Pyramidem ad partes E abſciſſam, dimidiam partem eſſe Pyramidis ad partes B abſciſſæ.

Figura Nona.



Demonſtratio.

Fig. 9. Priſma illud triangulare triplum eſt Pyramidis, cuius baſis eſt triangulum E D F: altitudo verò A E, quæ & ipſa eſt altitudo Priſmatis per 7. lib. 12. Ergo altera Pyramis, quæ eſt reliquum Priſmatis, eſt duæ tertiæ partes prioris Pyramidis. Hæc ergo illius dupla eſt. Quod erat probandum.

Corolla

Corollarium I.

Si triangulum rectangulum in ſe ducatur Pyramidem generat duplam Pyramidis illius, quæ producitur ex eodem triangulo in ſe ducto ſubalterne. Quæ eſt Propoſitio 5. lib. 7. à Geometra demonſtrata. Patet ex præcedenti ratiocinatione, ſi ponatur B D latus rectanguli, æquale lateri B C trianguli A B C fluentis.

Corollarium II.

Sequitur ſecundò Pyramidem factam ex ductu ſubalterno Orthogonij trianguli, vel in ſe vel in aliud; ſextam eſſe partem parallelepipedi, cuius baſis eſt rectangulum ſub B C, & B D lateribus triangulorum Orthogonorum quæ in ſe ducuntur altitudo verò B A latus commune, vnde ductus incipit. Nam Pyramis cuius baſis eſt rectangulum ſub B C & B D, altitudo verò B A; tertia pars eſt parallelepipedi ſub eadē baſi, & altitudine, per 7. lib. 12. & eius Coroll. Sed Pyramis huiuſmodi dupla eſt pyramidis genitæ ex ductu eorumdem triangulorum ſubalternè poſitorum per hanc Propoſ. Ergo parallelepipedum, Pyramidis huius eſt ſextuplū.

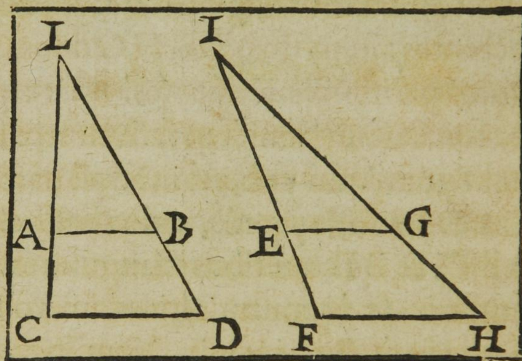
PROP. XXI. THEOR.

Si duo Trapezia A B D C, E G H F fuerint æqualia; duobúſque lateribus A B, C D & E G, F H parallelis conſtent & vtroque vtrique æqualibus. Dico corpus ex vtroque in ſe ducto ſecundum latera parallela, & lineas perpendiculares, genitum; eſſe æquale.

Præparatio.

Producantur duo reliqua Trapeziorum latera C A, D B: F E,H G donec concurrant in L & I (concurrent enim vt Prop.2. Huius ostensum est.)

Figura Decima.



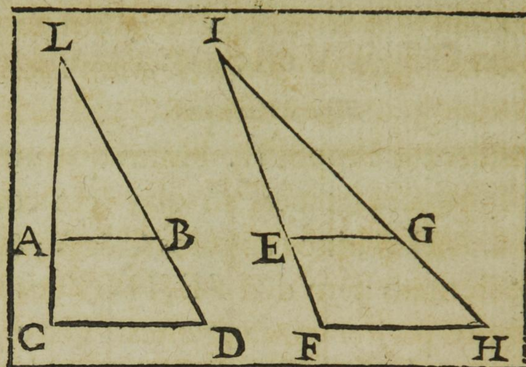
Demonstratio.

Fig.10. Duæ lineæ C D, A B duabus F H, E G sunt proportionales (singulæ enim singulis ex hypothesi sunt æquales.) Ergo per 22. lib.6. Triangulum C L D super primam C D; ad triangulum A L B simile super secundam A B, ita se habet; vt triangulum F I H super tertiam F H ad simile triangulum E I G super quartam E G. Et Conuertendo. Vt triangulum C L D ad Trapezium A C D B; ita triangulum F I H ad Trapezium E F H G. Et Permutando. Ita triangulum C L D, ad triangulum F I H: vt Trapezium A C D B ad Trapezium E F H G. Sed Trapezia sunt æqualia ex hypothesi. Ergo & triangula illa sunt æqualia. Ad hæc concipiantur

cipiantur ſuper A B, & C D: item ſuper E G, F H, erigi quadrata earumdem ipſarum linearum perpendiculariter ad planà triangulorum amborum: & iungi binos & binos angulos vtrorumque Quadratorum: fient duæ Pyramides per Propoſ. 11. Huius quarum vertices ſunt L, & I: puncta ſcilicet, ad quæ iam concurrunt duæ lineæ C A, D B binos angulos C & A; & binos D & B connectentes; item duæ F E, H G duos Quadratorum angulos pariter coniungentes. Hæ ergo Pyramides duæ, æquales ſunt inter ſe. Nam cum baſes Quadratæ harum Pyramidum rectæ ſint ad plana ipſa triangulorum C L D, F I H: lineæ à verticibus L & I, ad lineas C D & F H (quæ ſunt communes ſectiones baſium Piramidum & horum triangulorum) ductæ perpendiculares, erunt Pyramidum altitudines. Sed illæ lineæ à verticibus L & I triangulorum perpendiculares ductæ ad C D & F H, ſunt æquales. Sunt enim eædem lineæ, altitudines ipſæ æqualium triangulorum C L D, F I H, æquales baſes C D & F H habentium. Ergo Pyramides illæ ſunt æquales per 5. lib. 12. Æquales enim ſunt ex hypotheſi earum Quadratæ baſes. Quia verò per Prop. 7. Huius. Secantur proportionaliter per plana ducta per A B, per E G, ita vt eadem ſit Ratio Pyramidum integrarum C L D, F I H; & partium abſciſſarum A L B, E I G: ac proinde & reliquorum corporum, ſiue Pyramidum truncatarum ſuper Trapeziis A C D B, E F H G. Ergo & Pyramides abſciſſæ inter ſe, & Pyramides illæ truncatæ ſunt æquales. Conſtat autem ex conſtructione Pyramides huiuſmodi truncatas, ſiue

Fig. 10.

Figura Decima.



mauis appellare, Trapezia ſolida, ea eſſe ſolida quæ oriuntur ex Trapeziis in ſe ductis iuxta Conditionem in propoſitione ſtatutam. Omnes enim lineæ per omnia puncta linearum A C, E F ductæ, lineis A B, C D; & lineis E G, F H parallelæ; à ſeipſis ſupra ſeipſas perpendiculariter ad plana A D, E H erectis decurruntur: hoc eſt, totæ ipſæ ſuperficies A D, E H ſupra baſes ſuas A C, E F perpendiculariter ſupra ſeipſas erectæ ducuntur in ſe ſecundum lineas A B, C D; & E G, F H iuxta ſenſum definitionis Propoſ. 12. allatæ ad Geometræ, meámque mentem. Quare ſi duo Trapezia, &c. Quod erat probandum.

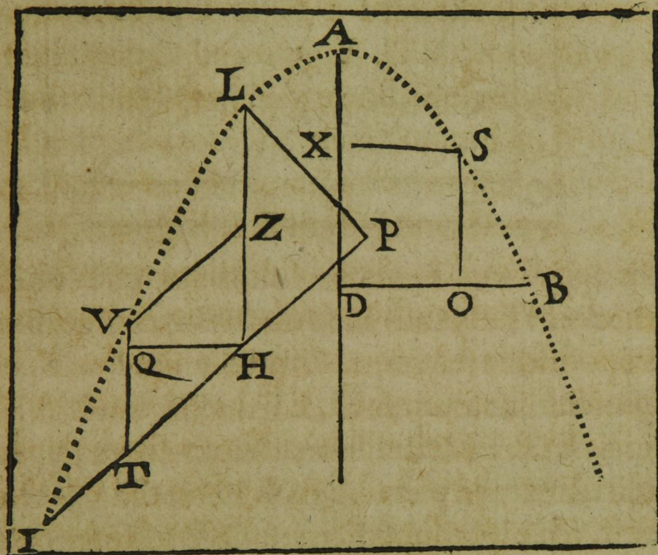
PROP. XXII. THEOR.

Si ex duabus parabolæ alicuius diametris A D, L H, æquales abſcindantur ſagittæ A D, L H; *Fig.* 11. & per D & H ordinatim ad ipſas applicatæ B D, I H ducantur. Quæ deinde applicatæ ſimiliter ſecentur in O & T: per quæ tandem puncta, lineæ

neæ

neæ O S, T V diametris A D, L H ducantur parallelæ, occurrentes ipſi parabolæ in S, & V. Dico lineas O S, T V eſſe æquales inter ſe.

Figura Vndecima.



Præparatio.

A punctis S & V, ducantur S X, V Z parallelæ ordinatim applicatis B D, I H: quæ & ipſæ ad eaſdem diametros A D, L H erunt ordinatim Applicatæ. Siquidem omnes ordinatim applicatæ ad eandem diametrum, ſunt inter ſe parallelæ. *Fig. 11.*

Demonſtratio.

Linea D A ita eſt ad X A: vt Quadratum lineæ B D, ad Quadratum lineæ S X per Prop. 20. lib. 1. Appollonij, ſiue ad Quadratum lineæ O D. (Eſt enim O X parallelogrammum, habens per 34. lib. 1. Aduerſa latera

OS, DX & OD, SX æqualia) vt autem Quadratum lineæ BD ad Quadratum lineæ OD: ita eſt Quadratum lineæ IH ad Quadratum lineæ TH per 22. lib. 6. (Sunt enim ex hypotheſi lineæ BD, IH ſectæ in O & T proportionaliter) ſed TH & VZ ſunt æquales in parallelogrammo VH. Ergo ita eſt Quadratum lineæ HI ad Quadratum lineæ VZ; vt Quadratum lineæ BD, ad Quadratum lineæ SX: ſiue vt linea DA ad
Fig. 11. XA. Sed vt Quadratum lineæ HI ad Quadratum lineæ ZV; ita eſt linea HL ad ZL. Ergo ita eſt DA, ad XA; vt HL ad ZL. Sed DA prima æqualis eſt tertiæ HL ex hypotheſi. Ergo & ſecunda XA æqualis erit quartæ ZL, per 14. lib. 5. Demptis ergo XA & ZL æqualibus ab æqualibus DA, HL; remanebunt æquales DX, HZ. Quibus cum ſint æquales OS, TV in parallelogrammis SD, VH; erunt & ipſæ OS, TV æquales inter ſe. Quare ſi ex duabus parabolæ, &c. Quod erat probandum.

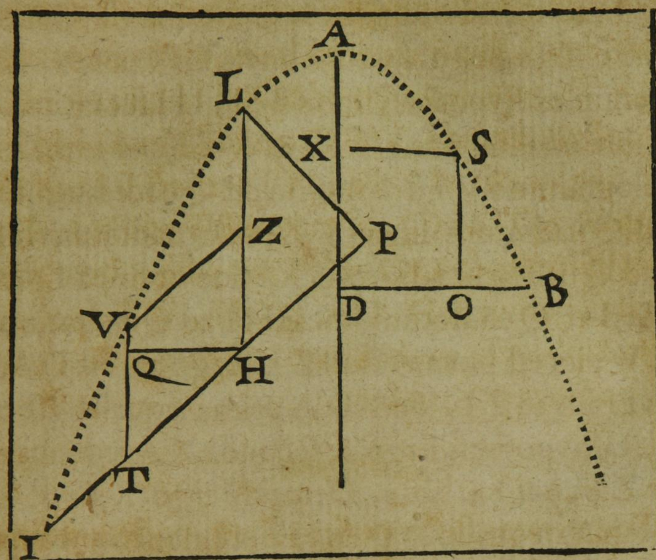
RROP. XXIII. THEOR.

Poſitis iterum æqualibus ſagittis AD, LH: & ordinatim Applicatis BD, IH ſimiliter ſectis in O & T. Ductis denique OS, TV parallelis ad diametros AD, LH. Dico lineas SO, VT æqualiter diſtare à diametris AD, LH.

Præparatio.

Fig. 11. A punctis D & H ducantur ad lineas SO, VT perpendiculares DO, HQ (hic cum AD ſit axis parabolæ, iam

Figura Vndecima.



iam eſt DO perpendicularis ad SO. In aliis caſibus noua linea duceretur) ducatur etiam à puncto L, linea LP perpendicularis ad HI productam vltra, H quando opus fuerit.

Demonſtratio.

Diametri abſciſſæ AD, HL ſunt æquales ex ſuppoſitione. Ergo æqualia ſunt triangula ADB, LHI (ductas concipe lineas AB, LI de induſtria omiſſas) per Prop. 218. lib. 5. de parab. doctiſſimi Geometræ noſtri. Ergo per Coroll. ad Prop. 15. lib. 6. vt ſe habet baſis BD ad baſim IH: ita Reciprocè ſe habet altitudo LP trianguli LIH; ad altitudinem AD trianguli ADB; hoc eſt, ad LH, lineæ AD ex hypotheſi æqualem, ſed vt LP ad LH; ita eſt in triangulo HQT, *Fig. 11.*

latus

latus H Q ad latus H T, (sunt enim duo triangula L P H, HQT similia propter angulos P & Q rectos, & angulos H & T illum externũ hunc internũ in parallelis LH, V T, æquales) ergo vt BD ad H I; ita est HQ ad H T. Et Permutando. Vt B D ad H Q ita I H ad H T. Sed ex hypothesi, vt I H ad H T; ita est B D ad D O. Ergo ita est BD ad HQ, vt eadem BD ad D O. Æquales sunt igitur lineæ O D, Q H per 9. lib. 5. quæ distantiam parallelarum A D, S O, & L H, V T metiuntur vtpote ad ipsas perpendiculares. Quare positis iterum &c. Quod erat probandum.

Scholium.

Fig. 11. Demonstrata est Propositio hæc, posita diametro A D, quæ & ipsa axis est parabolæ, atque adeo ordinatim applicata B D, ad ipsam perpendicularis. Quando verò vtraque diameter obliqua fuerit, & obliquæ ad vtramque ordinatim Applicatæ, veritas assertionis etiam in hoc casu facile colligetur eadem ratiocinatione, paulò tamen fortasse longiore. Qua omissa, breuissimam accipe. Quæcunque tandem proponantur diametri: Axem ducito A D: ex quo sagitta A D, abscindatur æqualis abscissis sagittis propositarum diametrorum; & ducatur B D ordinatim applicata, quæ similiter secetur in O, vt aliæ duæ Applicatæ sectæ sunt. Tunc demonstrabuntur parallelæ reliquarum diametrorum sigillatim eodem spatio inter se distare, quo distant axis A D & eius parallela S O, atque adeo & inter se ipsæ eodem distare.

Corollarium.

Corollarium I.

Si ducantur rectæ A S, LV, æqualia erunt Trapezia A S O D, L V T H per Prop. 3. Huius. Nam lineæ A D, S O æquales ſunt lineis L H, V T, ſingulæ ſingulis : & ſunt binæ & binæ parallelæ : eodem denique ſpatio inter ſe diſtant. Ergo ſunt æqualia huiuſmodi Trapezia.

Figura Vndecima.

Corollarium II.

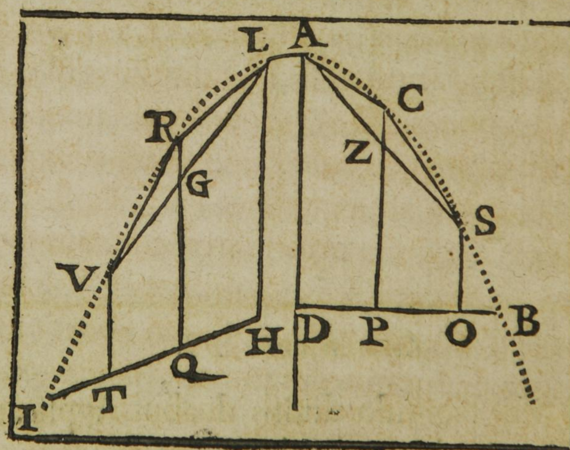
Colligitur ſecundo diuiſis duabus Applicatis D B, H I ſimiliter in aliis atque aliis punctis ductiſque per ea puncta lineis parallelis ad diametros : æquali ſpatio inter ſe diſtare parallelas vtriuſque diametri, quæ ſibi reſpondent, ſiue quæ homologæ ſunt. Nam ſingulæ ſimiliter ſecantis ordinatim Applicatas, eodem ſpatio diſtant à diametro, cui ſunt parallelæ per Prop. præcedentem. *Fig. 11.*

dentem. Si ergo vtrimque æquales diſtantiæ à diametris, demantur ab æqualibus : æquales remanebunt diſtantiæ parallelarum.

PROP. XXIV. THEOR.

Fig 12. Poſitis adhuc æqualibus ſagittis A D & L H: quas abſcindunt ordinatim ad diametros A D, L H, Applicatæ B D, I H : ſimilitérque ſectis ipſis Applicatis in O & T : per quæ puncta ducantur O S, T V diametris A D, L H, parallelæ. Dico lineas O S, T V abſcindere ex parabola ſegmenta æqualia nempe A C S, L R V.

Figura Duodecima.



Præparatio.

Applicatarum partes abſciſſæ D O, & H T, diuidantur bifariam in P & Q : per quæ puncta ducantur parallelæ P C, Q R diametris A D, L H ; occurrentes Parabolæ

rabolæ in C & R. Ducantur etiam A S, L V secantes proximè ductas lineas P C, Q R in Z & G. Denique ducantur rectæ C A, C S : R L, R V.

Demonstratio.

Cum ordinatim applicatæ D B, I H similiter secentur in O & T : & rursus partes abscissæ D O, H T similiter secentur in P & Q nempe bifariam : secabuntur ipsæ applicatæ D B, H I similiter in P & Q; nam vt D B ad D O; ita ex hypothesi H I ad H T. Et vt D O ad D P; ita H T ad H Q; ergo ex æquo, vt D B ad D P; ita H I ad H Q; ergo per Prop. 12. Huius. æquales sunt lineæ P C, Q R. Rursus quia Trapezium A D O S duabus oppositis lineis parallelis A D, S O constat, quæ æquales sunt lineis L H, V T. Per Prop. 12. Huius : & diuiduntur D O, H T similiter in P & Q : ac tandem ducuntur P Z, Q G parallelæ lateribus parallelis Trapeziorum : erunt P Z, Q G æquales per Prop. 4. Huius. Si ergo ab æqualibus P C, Q R, æquales demantur P Z, Q G; æquales remanebunt C Z, R G. Ad hæc. Tam linea A S, quam linea L V bifariam secantur, illa in Z, hæc in G, vt statim docebo, ergo C Z & R G sunt diametri ordinatim Applicatarum A S, L V. Cum ergo sagittæ C Z & R G, ab Applicatis A S, L V abscissæ, sint æquales : erunt segmenta parabolica A C S, L R V æqualia per Propos. 240. lib. 4. de Parab. Geometræ. Quod autem A S & L V bifariam diuidantur in Z & G, ita fit euidens. Si producerentur lineæ A S, D O concurrerent ad partes lineæ minoris S O & Fig. 12.

 fieret

fieret triangulum; cuius latera ſecarentur à parallelis OS, PZ proportionaliter. Ergo tam AS in Z. quam DO in P bifariam diuiduntur. Verùm ergo eſto, quod poſitis æqualibus ſagittis, &c. Quod erat probandum.

PROP. XXV. THEOR.

Iiſdem poſitis. Dico tam Trapezium ACPD, in ſe ductum corpus generare æquale corpori orto ex ductu Trapezij LRQH in ſe: Quam Trapezium CSOP in ſe ductum, æquale corpus producere corpori orto ex Trapezio RVTQ in ducto.

Figura Duodecima.

Demonſtratio.

Duo Trapezia ACPD & LRQH conſtant duobus lateribus AD, CP. Et LH, RQ parallelis & æqualibus per Prop. 22. Huius; ſunt enim ordinatim Applicatæ DB, HI ſimiliter ſectæ in P & Q. Vtriuſ-

que

que porro altitudo est æqualis per Prop.23.Huius ergo per Prop. 3.Huius æqualia sunt duo illa Trapezia. Ergo per Prop.21. Huius. Si in se ducantur,corpora; siue solida Trapezia, æqualia generabunt. Pari modo Trapezia CSOP, RVTQ. Solida Trapezia, si in se ducantur, æqualia producent. Quare iisdem positis, &c. Quod erat probandum.

PROP. XXVI. THEOR.

Iisdem adhuc positis. Sectis scilicet, ordinatim Applicatis DB, HI æquales sagittas AD, LH abscindentibus; similiter in O & T. Sectis item DO, HT bifariam in P & Q: ductísque lineis PC, QR parallelis ad diametros AD,LH. Ac tandem iunctis AC, CS, &LR, RV. Dico corpus ortum ex ductu polygoni ACSOD in se, posita basi DO: æquale esse corpori orto ex ductu polygoni, LRVTH in se, posita basi siue principio ductus, HT. Idémque semper euenire; si rursus basium partes DP, PO & HQ, QT bifariam diuisis, & per diuisiones ductis lineis ad diametros parallelis, multiplicentur polygoni vtriusque latera, ad parabolam Applicata. *Fig.12.*

Demonstratio.

Cum ex præcedenti Propositione constet Trapezium ACPD in se ductum. Trapezium solidum generare æquale Trapezio solido, quod ex Trapezio LRQH in se ducto generatur: Idémque de Trapeziis

CSOP, RVTQ conclusum sit. Constat duo simul Trapezia solida ex duobus Trapeziis prioribus in se ductis orta: quæ aliud non sunt, quam corpus ex poligono ACSOD in se ducto genitum. Æqualia esse duobus Trapeziis solidis posterioribus, hoc est, corpori ex polygono LRVTH in se ducto, genito. Quæ ratio, cum valeat in quauis multiplicatione laterum polygonorum per continuam bisectionem linearum DO, & HT, instituta. Patet totius propositionis veritas.

Corollarium.

Fig. 12. Ex præcedenti & proximè allata propositione sequitur. Quod si ipsæ integræ ordinatum Applicatæ DB, HI continuè bisecentur: párque fiat partium vtriusque Applicatæ multitudo: ex quibus singulis partibus parallelæ educantur; vt fiant polygona, quemadmodum in hac propositione constructa sunt; Polygona huiusmodi in se ducta generare corpora æqualia: nec alia opus est ad hoc probandum demonstratione, quam proxime allata perpetua enim illa bisectio vtriusque Applicatæ, vtramque in partes proportionales diuidit; vnde, facta polygonorum constructione, sequitur æqualitas corporum ex polygonis in se ductis, genitorum. Imò nec bisectio omninò necessaria est ad polygonorum constructionem. Si enim vtraque ordinatim Applicata DB, HI similiter quomodocumque secentur, & reliqua absoluantur ad polygonorum constructionem necessaria: generabunt huiusmodi

polygona

polygona in ſe ducta, ſolida æqualia. Quod eodem modo demonſtrabitur, quo demonſtrata eſt Propoſitio ſuperior.

PROP. XXVII. AXIOMA.

Illæ quantitates dicendæ ſunt æquales à quibus in infinitum partes demi poſſunt inter ſe æquales. *Fig.13*

EXPOSITIO.

Aſſumit hoc principium tanquam per ſe notum Geometra lib. 8. de Proport. Princ. 1. nec puto quemquam ab eo diſſenſurum, ſi modo ſenſum terminorum percipiat, qui eſt huiuſmodi. Si propoſitis duabus quantitatibus, liceat partes in alterutra aſſignatas, ex altera demere; non poſſunt non eſſe æquales duæ illæ quantitates. In alterutra, inquam aſſignatas. Ita vt ſubſtractio illa partium mutua & Reciproca eſſe poſſit: Alioquin ſi partes detrahendæ in alterâ tantùm earum quantitatum aſſignarentur, quæ ab altera demi deberent: falſum ſequeretur interdum ex hoc principio. Nam proponantur duæ quantitates, palmaris vna, altera bipalmaris: partes omnes palmaris demi ſemper poterunt ex bipalmari, ſequi tamen non poteſt ex eo æqualitas duarum illarum quantitatum: optime tamen ſequetur ſi libera ſit partes æquales ex vtralibet demendi facultas. Neque enim in caſu propoſito licebit partes quaſlibet in bipalmari aſſignatas ex palmari ſubtrahere; vnde non æqualitas earum quantitatum,

ſed

ſed inæqualitas concluderetur. Atque hic eſt, haud dubie, Geometræ ſenſus: iuxta quem, principium cenſuit tam euidens; vt cum obſeruaret in angulis omnino, vt videbatur, non habere locum; angulos maluerit à ratione omnis quantitatis excludere, quam huic principio aſſenſum non præbere. Circa quod vt ſenſum expromam meum, licet ab inſtituto nonnihil recedere videat; ſuadet in primis admiranda angulorum contingentium natura; qua de hic agitur. Et à ſummo Geometra diſputatur. Cuius loco citato hæc ſunt verba.

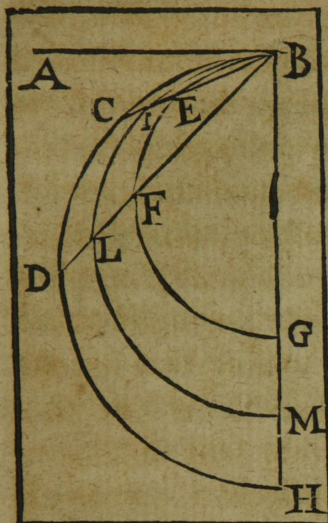
Quod ſi, inquit, *inter veras quantitatis ſpecies Angulos admiſerimus; incidemus in Labyrinthos quibus Geometriæ principia ſe deſtruant, neceſſe eſt. Quod vt manifeſtum fiat, ſequentis propoſitionis demonſtrationem conſiderandam pono.*

THEOREMA.

Contingat recta A B duos circulos ſe contingentes in B: exhibentes duos angulos contingentiæ A B C D, A B E F. Dico hos angulos eſſe æquales.

Demonſtratio.

Illæ ſunt, inquit, *dicendæ æquales quantitates à quibus in infinitum partes demi poſſunt inter ſe æquales. Sed hoc fieri poteſt in Angulis dictis. Quod ſic oſtendo. Diuidatur ſemicirculi Perimeter B D H bifariam in D: & ducta B D occurrat ſemicirculo BEG in F. Igitur angulus D B H, æqualis*



lis est angulo F B G. Eadem operatio fiat de arcu B C D. Bisecetur scilicet in C, & ponatur recta B C. Itaque etiam Angulus CBD, æqualis est Angulo E B F. Sed hoc in infinitum fieri potest. Igitur quantitas Anguli HBCD semicirculi, æqualis est quantitati Anguli GBEF alterius semicirculi. Quare reliqui etiam Anguli contingentiæ, qui complent rectum Angulum sunt inter se æquales. Fig. 13

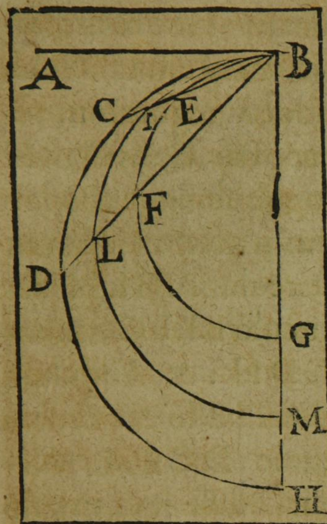
Hinc consequitur doctrina, quæ plane destruit Geometriæ principia. Quod scilicet totum sit parti suæ æquale. Nam Angulus semicirculi GBEF, pars est Anguli HBCD, & tamen ostensa est huic Angulo æqualis.

Hæc Geometra. Ex quibus patet, vt allati principij robur tueatur; angulos, qui illud obseruare minime possunt; extra omnem quantitatis Rationem constituere. Cui hac in re, vt assentiam (quamquam tantus Author summi sit apud me ponderis,) adduci vix possum. Vt enim concedam angulos cuiuscumque generis inter veras & hactenus receptas tres quantitatis species reponendos non esse: quantitatis tamen Rationem proxime æmulantur; & quidem euidentius quam tempus, vel motus, aut ponderum momenta: quæ, vt multa alia, propter quandam quantitatis Rationem, quam obseruant; veræ ipsius quantitatis iure

donantur; eiúſque Principiis velut ſibi propriis nituntur. Et verò quanti ſemper fuit momenti apud Geometras angulorum doctrina? Quam frequens vſus? Conſulatur ipſæ Geometriæ parens Euclides. Obſeruabitur non obſcurè iacta ab eo Geometriæ fundamenta non minus angulis niti, quam propriis ipſis veræ quantitatis generibus.

Verum ſi anguli quantitatis Rationem obtinere concedantur. Vel allatum principium corruat neceſſe eſt; vel eo ſtabilito, abſurdum à Geometra deductum admittendum. Ergo verò & angulos quoſlibet, (pace dixerim tanti viri,) quandam quantitatis Rationem ſibi vendicare aſſero: & principium illud æquè in angulis ac in reliquis quantitatibus notum eſſe cenſeo. At allata demonſtratio contrarium ſuadet euidentiſſime? Nunquid tam euidenter vt omnem euadat fallaciæ ſuſpicionem? Ita ſane ego quidem cenſeo aliquid fallaciæ in ea demonſtratione ſubeſſe. Quam vt aperiam, hæc attentè perpendantur.

Fig. 13. Vult Author doctiſſimus conſtructionem ad demonſtrationem ita præparari; vt anguli DBH, CBD qui tanquam partes ex duobus propoſitis angulis ſemicirculorum DCBH, FEB G in infinitum auferri debent ſint rectilinei: ſed angulos rectilineos qui in infinitum ab angulis ſemicirculorum demi exigit: quid aliud exigit niſi vt tales ſint anguli, qui debent ab vtroque angulo ſemicirculi demi vt minores ſemper ſint in infinitum, quam vterque ſemicirculorum inæqualium angulus: Siquidem omnis angulus



lus rectilineus acutus, semper minor est omni angulo semicirculi per 16. lib. 3. At si partes ex vtraque quantitate demendæ eam conditionem admittere possunt. Quid tam inæquale quod ęquale probari non possit per principium allatum eo modo expositum. Si enim duæ sint quantitates vna palmaris, altera bipalmaris, quas velim probare esse inter se æquales; id perficiam; si mihi liceat partes demendas ita determinare, vt minores in infinitum semper sint quantitate palmari. Si eas partes æquales ex vtraque quantitate in infinitum subtraxero. Eas enim ex suppositione demere possum ex quantitate palmari, quandoquidem minores, quam ea sit, supponuntur: multo magis ex bipalmari, eas licebit subtrahere. Ergo iuxta principium allatum æquales forent quantitates palmaris & bipalmaris. Quis id admittat? Is sane qui hanc conditionem in partibus æqualibus in infinitum demendi ex vtraque quantitate, adhibere voluerit siue explicitè, vt ego in allato exemplo, siue implicitè, vt vir doctissimus, partes demendas ex angulis semicirculorum iubens esse angulos rectilineos acutos: hoc enim ipso, minores semper vult partes demendas vtroque angulo semicirculi, quamuis inter se supponantur inæquales. Quod

vt euidentius conſtet. Liceat mihi pro iure meo partes quaſcumque ex angulis ſemicirculorum DCBH, FEBG detrahere. Liceat mihi loco angulorum rectilineorum, curuilineis, ſi lubeat, vti. Quis id mihi non concedat? cum ipſi etiam anguli ſemicirculorum curuilinei ſint; parteſque eiuſdem naturæ, videantur
Fig.13. exigere. Liceat ergo mihi ſemicirculum BILM deſcribere maiorem quidem ſemicirculo BEFG, minorem verò altero ſemicirculo BCDH: & Angulum ſemicirculi LIBM ſtatuere. demi poſſe concedam angulum hunc LIBM ex angulo DCBH. Nequaquam tamen admiſero demi poſſe ex angulo FEBG. Cum ergo pars quædam anguli DCBH, nempe angulus LIBM ex eo demi poſſit: quæ eadem ex angulo FEBG nequit auferri. Nihil abſurdi ſequitur ex principio allato etiam ſi anguli in quantitatis ſortem admittantur. Imò optime ex eo concludetur inæqualitas angulorum, quos inæquales ſemicirculi cum ſua diametro continent. Sicut & angulorum contingentiæ; eo quod quædam pars vnius angulorum illorum demi nequit ex altero. Ita vt abſurdum, quod ante ſequi videbatur, non aliunde ortum habeat quam ex ſuppoſitione talium partium ſubtrahendarum, nempe angulorum rectilineorum acutorum, qui ſemper in infinitum tales erunt, vt demi poſſint ex quouis angulo ſemicirculi cuiuſlibet. Qua-
Fig.13. re admittantur anguli cuiuſcumque generis in Rationem aliquam quantitatis, & veriſſimum eſto principium hac propoſitione allatum, quo ſtatim vſurus ſum

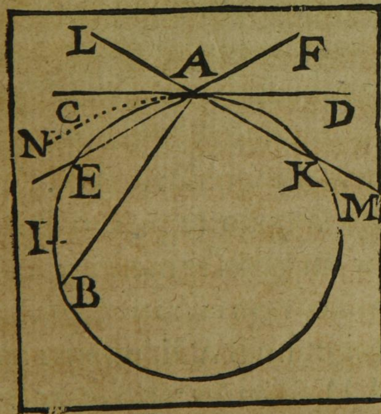
Propo

Propoſitione ſequenti. Sed quando ſemel à via digreſſi ſumus; antequam in eam reuertamur, accipe iucundam ſuper eadem angulorum contingentiæ materiâ diſceptaciunculam, quam cum Geometra doctiſſimo Reuerendi P. Gregorij olim in Mathematicis diſcipulo, aliâs habere me contigit. Bina propoſuit ille Theoremata perquam ſanè ſubtilia, nec alia, vt reor, in officina procuſa, quàm qua proxime allatum. Sic ergo habet.

Theor. Primum.

Tangat linea recta C D circulum in A: à quo puncto ducatur recta A B intra circulum cadens. Dico, inquit, eandem eſſe rationem anguli rectilinei C A B ad angulum rectilineum B A D ei deinceps: & anguli ſegmenti BAI ad angulum ſegmenti BAK ei deinceps.

Demonſtratio.



Vel enim maior eſt ratio ſegmenti anguli B A I ad ſegmenti angulum B A K: quàm ratio anguli B A C ad angulum B A D; vel minor. Si maior; ita poterit augeri angulus B A C, & minui angulus B A D, (quanquam ſine vlla diminutione idipſum præſtari poteſt) vt eadem ſtatuatur ratio, cum ratione angulorum ſegmentorum. Id præſtet linea L M. Quia *Fig.14*

igitur ita se habet angulus B A L ad angulum B A M; vt se habet segmenti angulus B A I ad segmenti angulum B A K: est autem angulus B A L maior angulo B A I segmenti; erit etiam angulus B A M maior angulo B A K segmenti. Quod est absurdum: est enim angulus B A M minor, cum linea A M intra circulum cadat. Non ergo maior est ratio anguli B A I segmenti, ad segmenti angulum B A K; ratione anguli B A C ad angulum B A D.

Fig. 14.

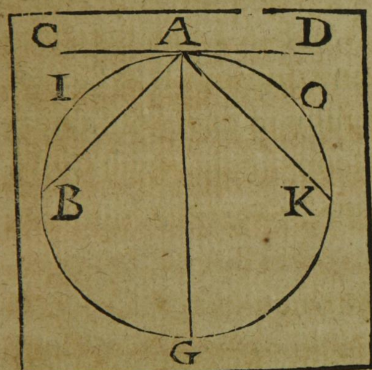
Sed neque minor est ratio segmenti anguli B A I ad segmenti angulum B A K; ratione anguli B A C ad angulum B A D. Nam si ita est: minuatur angulus B A C, & augeatur angulus B A D, ita vt eadem sit ratio angulorum rectilineorum & segmentorum, id enim fieri potest. Fiat ducta linea E A F. Quia igitur ita est angulus B A E ad angulum B A F vt segmenti angulus B A I ad segmenti angulum B A K. Est autem angulus B A E minor angulo segmenti B A I erit & angulus B A F minor angulo segmenti B A K. Quod est absurdum. Ergo minor non est ratio segmenti anguli B A I ad segmenti angulum B A K, ratione anguli B A C, ad angulum B A D. Si igitur ratio segmenti anguli B A I ad angulum B A K segmenti, neque maior neque minor est ratione anguli B A C ad angulum

gulum B A D. Ergo eſt æqualis. Quod erat probandum.

Theor. Secundum.

Tangat linea C D circulum in A, ad quod punctum ducatur perpendicularis A G, quæ erit circuli diameter. Dico angulum rectum G A C, & angulum G A B ſemicirculi eſſe æquales.

Præparatio.



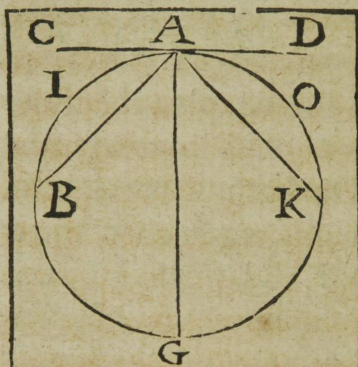
Diuidatur vtraque ſemicircumferentia bifariam in B & K: ad quæ puncta ducantur lineæ A B, A K. Anguli recti G A C, G A D bifariam diuidentur; ita vt quatuor anguli ad A conſtituti ſint ſemirecti, atque adeo æquales. Quare angulus B A C tertia pars erit anguli B A D. Et quia per præcedens Theor. ita eſt angulus ſegmenti B A I ad ſegmenti angulum B A O: vt angulus B A C ad angulum B A D: erit etiam ſegmenti angulus B A I tertia pars ſegmenti anguli B A O. Ergo etiam ſegmenti angulus K A O, angulo B A I æqualis, erit tertia pars ſegmenti anguli B A O. Atque adeò æqualis duobus angulis ſingulis G A K, G A B. Si enim à toto angulo B A O ſegmenti, dematur tertia pars, ſegmenti ſcilicet angulus K A O; & reliquus angulus rectilineus B A K bifariam diuidatur à linea A G; to- *Fig. 15.*

tum

tum ſegmenti angulum B A O in tres partes æquales diuidi neceſſe eſt. His poſitis.

Demonſtratio.

Fig. 15.



Angulus B A C æqualis eſt angulo B A G cui oſtenſus eſt æqualis ſegmenti angulus K A O ſiue B A I. Si ergo duobus æqualibus B A C, B A I addatur communis angulus B A G: fiet angulus rectus G A C æqualis ſemicirculi angulo G A I. Quod erat probandum.

Corollaria.

Hinc colligebat Theorematum Author quædam, quæ paradoxa appellabat.

Primum eſt, omnes angulos ſemicirculorum omnium æquales eſſe. Sunt enim omnes æquales oſtenſi angulo recto.

Secundum omnes angulos contactuum æquales etiam eſſe inter ſe. Si enim anguli omnes ſemicirculorum ſunt æquales: æquales item anguli recti: non poſſunt non eſſe æquales Anguli contactus, qui ſunt differentia Angulorum rectorum & Angulorum ſemicirlorum.

Tertium. Quantitatem addi poſſe quantitati; totum

tum tamen non fieri maius patet nam angulus contactûs additus angulo ſemicirculi, angulum rectum conſtituit qui non eſt maior angulo ſemicirculi.

Quartum. Veram non eſſe Propoſitionem 19.lib.5. Euclidis ſi ſit vt totum ad totum; ita ablatum ad ablatum: erit reliquum ad reliquum vt totum ad totum. Nam angulus BAC eſt tertia pars anguli BAD; & ablatus ſegmenti angulus BAI, tertia pars ablati anguli BAO. & tamen reliquus angulus contingentiæ CAI, non eſt tertia pars reliqui anguli contingentiæ DAO. Sunt enim huiuſmodi anguli contingentiæ, æquales. *Fig.15.*

Alia plura ex duplici illo Theoremate inaudita ſequerentur quæ firmiſſima alioqui Geometriæ fundamenta, ſi verum foret, concuterent. Verùm paralogiſmo, quamquam ſolerti & peracuto, concluſio prioris Theorematis, vnde ſecundum pendet, tota nititur: vt multiplici argumento demonſtro ſequenti Propoſitione.

Theorema.

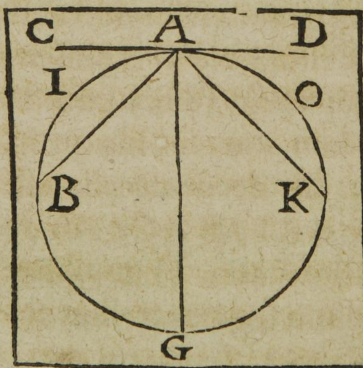
Paralogiſmo non caret probatio Theorematis primi præcedentis.

Demonſtratio.

Primò. Quæ theorematum Author corollaria vocat paradoxa; aptius abſurda & impoſſibilia vocanda fuere: quæ cum ex poſito theoremate primo ſequantur: ipſum falſum & eius probationem vitioſam aper-

tè indicant non secus ac infinitas propositiones probant Geometræ per deductionem ad aliquid absurdum, quod nullum visum est vnquam absurdius eo: quo assereretur, vt hic contingit, totum non esse maius aliqua sui parte: vel excedens quantitate, quæ exceditur, non esse maius: quod necessariò sequitur, si semicirculorum omnium anguli æquales concedantur. Nec minus absurdum est quantitatem ad quantitatem addi, neque tamen augeri. Nunquid conclusionem illam augmentatione deductam par est certiorem æstimari Principiis huiuscemodi lumine naturali solis luce non minùs splendido notissimis? Imò cum hæc sequantur ex Antecedente illo Theoremate. Solemni Geometrarum more reiiciatur absurdum enim non nisi ex absurdo proficisci potest.

Fig. 15.



Secundò. Cum dicitur si non est Ratio anguli B A I segmenti ad segmenti angulum B A O, eadem cum ratione anguli B A C, ad angulum B A D, vel est eâ maior vel est minor. Respondeo neque eandem esse, neque maiorem neque minorem: quam igitur? Nullam. Quid ita? quia scilicet inter eas quantitates, angulum, inquam, B A I segmenti, & segmenti angulum B A O, quædam infinitas habetur; quæ omnem inter eas Rationem tollit. Quomodo? En tibi. Si est

Ratio

Ratio quædam inter angulum B A O ſegmenti & angulum B A I ſiue K A O, ſegmenti: erit etiam Ratio quædam inter angulum rectilineum B A K (qui eſt exceſſus Antecedentis ſupra Conſequens) & ſegmenti angulum K A O, qui eſt Conſequens. Ergo etiam Ratio quædam erit inter angulum G A K (qui ſemiſſis eſt Antecedentis) & eundem ſegmenti angulum KAO: Sed angulus K A D æqualis eſt angulo K A G. Ergo Ratio quædam eſt inter angulum K A D & ſegmenti angulum K A O. Ergo etiam Ratio quædam foret inter angulum contingentiæ O A D (qui eſt exceſſus Antecedentis ſupra Conſequens) & ipſum Conſequens, ſcilicet ſegmenti angulum K A O. Sed hoc dici non poteſt. Nam angulus contingentiæ O A D infinities multiplicatus nunquam excedet aut etiam adæquabit ſegmenti angulum O A K, qui maior eſt angulo quocumque rectilineo, qui minor ſit angulo D A K. Itavt conditio neceſſaria iuxta definitionem 5. lib. 5. Euclidis ad aliquam Rationem habendam inter ſe, his quantitatibus deſit. Ergo etiam & illis deeſſe neceſſe eſt: ſcilicet ſegmentorum angulis B A I, B A O. Vnde præſcinditur tota Authoris ratiocinatio. Hinc obiter obſerues (aliud enim ago) nullum ſegmenti vllius angulum ad alium cuiuſcumque alterius ſegmenti angulum ſiue eiuſdem circuli ſiue diuerſi Rationem habere poſſe. Nam anguli ſegmentorum ab angulis rectilineis, inter quos ſemper inuenitur aliqua Ratio, differunt angulo contingentiæ; qui angulos, quibus adhærent omnis Rationis incapaces reddunt. Sed ad rem.

Fig. 14.

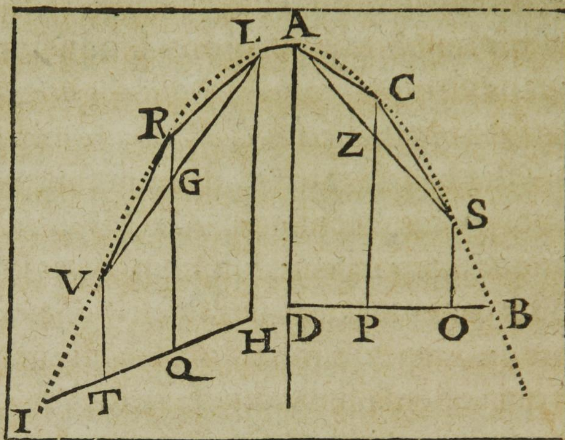
Tertiò. Etiam conceſſo, quod inter angulos ſegmentorum B A I , B A O Ratio aliqua intercedat. Poſito etiam quod aſſeram Rationem B A C anguli, ad angulum B A D; maiorem eſſe Ratione anguli B A I ſegmenti ad ſegmenti angulum B A K. Tunc iubet Author vt minuatur angulus B A C vt ſtatui poſſit illa Rationum æqualitas: ſed ita iubet vt velit diminutionem illam fieri per lineam rectam A E. At ego, cui liberum eſt diminutionem anguli illius B A C inſtituere ſiue per rectam lineam ſiue per curuam, donec ipſe probet per curuam fieri non poſſe; volo angulum illum per curuam minui, deſcripto ſcilicet maiore alio circulo A N tangente in A tam priorem circulum quam rectam C D. Ita vt iam angulus B A N ad angulum B A D eandem habeat Rationem quam ſegmenti angulus B A I, ad ſegmenti angulum B A K. Quid tum ex eo abſurdi ſequitur? Nihil omnino? Atque adeo tota euaneſcit vis illius Argumenti. Quod ſi contendat ita minui debere angulum B A C ſiue per rectam vt A E, ſiue per curuam, vt angulus reliquus minor ſit ſegmenti angulo B A I; ita vt deſcribi velit circulum minorem circulo A I B, qui eundem tangat in A. Reſpondeo nec debere nec poſſe id exigere: non debet, quia nulla affertur Ratio, quæ id ita fieri debere demon

demonſtret. Nec verò etiam poteſt: quia tunc iubet abſurdum conſtrui quod cum aperta principij petitione, in me retorquet. Quis enim non videat, ſi talis diminutio fieri imperetur anguli B A C, vt reliquus angulus minor ſit angulo B A I ſegmenti; aduerſarium cogi, aliquid aſſerere vnde abſurdum ipſe deducas: vt tibi potiùs abſurdum illud in antecedentibus commiſſum, quam ipſi tribui debeat: atque adeò ex abſurdo à te ſuppoſito poſtmodum inferre te angulum B A F, aut B A D minorem eſſe ſegmenti angulo B A K; eò quod angulus B A E minor ſit ſegmenti angulo B A I cur enim minor eſt angulus B A E, angulo B A I ſegmenti: niſi quia ita ſtatutum à te prius fuit. Atque hæc ſatis ex occaſione de mirabili natura anguli illius contingentiæ. Inſtitutum proſequamur.

PROP. XXVIII. THEOR.

Poſitis adhuc quæ ſuperioribus Propoſitionibus poſita ſunt. Abſcindant ſcilicet Ordinatim Applicatæ D B, H I æquales ſagittas A D, L H ex diametris Parabolæ: ipſæque Applicatæ ſimiliter ſecentur in O & T: per quæ puncta ducantur O S, T V diametris parallelæ, abſcindentes ex Parabola arcus A C S, & L R V. Dico figuram mixtam, quæ continetur arcu Parabolico A C S, & rectis lineis A D, D O, O S; in ſe ductam producere corpus æquale corpori producto ex figura mixta L R V T H in ſe ducta.

Figura Duodecima.



Præparatio.

Fig.12. Ducantur AS & LV abſciſſos arcus parabolicos ſubtendentes. diuidatur vtraque linea DO, & HT bifariam in P & Q: ductíſque PC, QR, diametris, parallelis, parabolæ occurrentibus in C & R: iungantur lineæ rectæ CA, CS, & RL, RV; Rurſus, ſi lubet, diuidantur partes PD, PO; item QH, QT bifariam & eadem conſtructio abſoluatur: ita vt polygona deſcribantur in ſegmentis Parabolicis ACS, LRV, quotcumque libuerit laterum.

Demonſtratio.

Quia corpus ortum ex ductu Trapezij ASOD in ſe; æquale eſt corpori orto ex ductu Trapezij LVTH in ſe, per Prop.21. Huius. Item per Prop.26. Corpus ortum ex polygono rectilineo ACSOD in ſe ducto; æquale eſt corpori orto ex polygono rectilineo

LRVTH

LRVTH in ſe ducto: & ita in infinitum multiplicatis polygonorum lateribus, ſemper æqualia corpora, ſi in ſe ducantur huiuſmodi polygona; productura ſunt. Hinc fit, vt ex vtroque corpore; quod generatur ex Trapezio mixto Parabolico ACSOD, & mixto Trapezio LRVTH in ſe ductis: demi poſſint corpora facta ex polygonis rectilineis ASOD, AVTH in ſe ductis: quæ corpora cum ſint æqualia per Prop. 26. Huius. Cõſtat partes illas æquales auferri poſſe ex vtroque corpore ex Trapeziis mixtis in ſe ductis genito.

Rurſus quia oſtenſa ſunt corpora facta ex ductu polygonorum rectilineorum ACSOD, & LRVTH in ſe, æqualia eſſe. Et vtrumque minus eſt corpore; quod fit ex ductu Trapeziorum mixtorum Parabolicorum ACSOD, LRVTH in ſe: Poterunt illa corpora ex his tamquam horum partes auferri. Quæ ſubtractio cum poſſit in infinitum inſtitui, multiplicatis in infinitum polygonorum lateribus, magis magíſque ſemper ad parabolam accedentibus. Quid obſtat, quo minus concludamus ex allato axiomate Propoſitione præcedenti, genita corpora ex vtraque figura mixta, arcu ACS, rectíſque lineis AD, DO, OS; & arcu LRV, rectíſque lineis LH, HT, TV comprehenſa in ſe ducta; æqualia eſſe inter ſe. Quare poſitis adhuc, &c. Quod erat demonſtrandum. *Fig. 12.*

Corollarium.

Ex præcedenti diſcurſu manifeſtum etiam fit, corpora genita ex ipſis integris ſemiſegmentis parabolicis ACSO

ACSODA, & LRVTHL in ſe ductis, æqualia eſſe, imò & ipſa ſegmenta integra, quorum illa ſunt dimidia ſi in ſe ducantur, corpora producent æqualia: Vtrobique enim poſſunt corpora æqualia ex inſcriptis polygonis in ſe ductis genita, à corporibus ex ductis ſegmentis parabolicis in ſe ortis, genitis, tanquam partes auferri.

PROP. XXIX. DEFINIT.

Vngula Parabolica eſt dimidium corporis illius, quod ex ſegmento Parabolico in ſe ducto generatur, abſciſſum plano ſecante per diametrum, totum illud corpus.

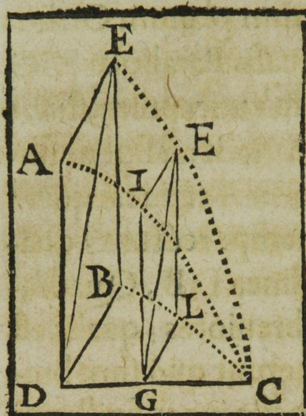
EXPOSITIO.

Fig.16.

Eſto ſegmentum, vel quod aptius eſt, ſemiſegmentum Parabolicum ADC, idem quod in antecedente propoſitione habetur, contentum axe ipſo AD, & ordinatim applicatâ DC ad angulos rectos ad axem, & arcu Parabolico AC. Vt ſegmentum hoc in ſe ducatur, concipiendum eſt circa DC Applicatam conuerti (hæc enim communis baſis eſt, vnde motus ſiue ductus initium ſumitur) donec ad planum ſubſtratum ad rectos ſit angulos: quale repreſentatur forma DBLC. In qua DB concipienda

eſt æqualis axi D A, & ad ſubſtratum planum Orthogona: curua verò linea B L C, æqualis Parabolæ AIC. Iam ſegmentum D B L C in eo ſitu conceptum, fluere concipiatur, donec linea D B peruenerit ad finem fluxus, nempe ad A. Et ſitum eundem in A retineat quem obſeruauit toto fluxus tempore, nempe rectum; qualis eſt A E. Deſcriptum erit tunc à linea D B, Quadratum D A E B. Interim aliæ lineæ breuiores, qualis eſt G L, eò citiùs ad terminum peruenerunt quò ſunt breuiores (vt Prop. 12. Explicui, quam hic iuuat ſigillatim applicare ob rei momentum.) Singulæ tamen deſcribunt Quadratum; vt G L, Quadratum deſcribit GIFL. *Fig.16* Abſoluto motu, habemus corpus circumſcriptum ſuperficie Parabolica D A I C ſubſtrata: Parabolica item ſuperficie priori æquali, & ad eam Orthogona DBLC. Et duabus curuis ſuperficiebus; quarum altera generatur ab omnibus punctis Parabolæ B L C, per fluxum & eſt ſuperficies curua; quam recta B E, & duæ lineæ curuæ E F C, B L C comprehendunt. Altera eſt huic æqualis, & generatur ab omnibus lineis motis, dum erectæ ſtant in termino fluxus ſuper Parabolam A I C ſubſtratam, cuiuſmodi ſunt lineæ A E, I F. Conueniunt verò & ſe mutuò interſecant duæ illæ curuæ ſuperficies in linea curua communi E F C. His ritè perceptis, quæ ſibi mens aptius proponit, quam vlla deſignatio poſſit exhibere (quod eſt ſolemne in ſolidis exprimendis in area plana incommodum) ſi tandem concipiatur planum agi per diametros Quadratorum D E, G F & aliorum omnium tranſiens per lineam curuam

Fig. 16.



E F C, & rectam D C (extenditur enim per lineas parallelas D E, G F quæ diametri sunt Quadratorum) diuidet planum hoc, vt patet, corpus ex segmento Parabolico D A C in se ducto generatum, in duas partes æquales. Harum ergo alteram voco cum Geometra Vngulam, ob similitudinem vngulæ equinæ; præsertim si loco semisegmenti, totum segmentum in se ducatur, vt integra appareat vngula.

Porrò superficies illa curua, quæ lineis super Parabolam A I C perpendiculariter erectis super planum substratum A D C; componitur: Cylindrus est Parabolicus, vel eius pars: sicut & altera ei æqualis, quam efformant lineæ B E, L F & aliæ huiusmodi à Parabola B L C perpendiculariter erectæ ad planum D B C.

Fig. 16. Quæcunque demum hic exposui adhibito segmento Parabolico: quod abscindit ordinatim applicata D C recta ad axem A D: eadem reliquis segmentis parabolicis, quæ ab obliquis ordinatim Applicatis abscinduntur, quale est segmentum L H I in figura superioris Propositionis 28. æquè conueniunt: his tamen hic etiam obseruatis, quæ supra Prop. 12. Circa planorum obliquorum in se ductum, obseruanda monui.

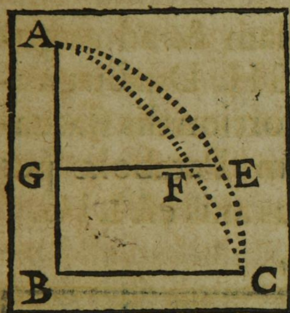
PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Sit Parabolæ A F C diameter A B. Dico nullam aliam Parabolam: cuius eadem ſit diameter A B, idémque vertex A; deſcribi poſſe; quæ cum Parabola in alio puncto quam in A conueniat.

Præparatio.

Figura Decimaſeptima. *Fig. 17*



Sit enim, ſi fieri poteſt, alia Parabola A E C quæ cum Parabola A F C conueniat in C. Ducatur ordinatim Applicata C B, ad diametrum A B: alia item ducatur ad eandem diametrum ordinatim Applicata E F G ſecans vtramque Parabolam in E & F.

Demonſtratio.

Vt ſagitta B A, ad ſagittam G A: ita eſt quadratum ordinatim Applicatæ B C ad quadratum ordinatim Applicatæ E G in Parabola A E C; & ita etiam ad quadratum ordinatim Applicatæ F G in Parabola A F C per 20. lib. 1. Appollonij. Quadrata ergo linearum inæqualium G E, G F. Sunt æqualia. Quod eſt abſurdum. Quare ſi ſit Parabolæ, &c. Quod erat probandum.

Corollarium.

Hinc necessariò sequitur vt si duarum Parabolarum sagittæ, & ordinatim Applicatæ congruant: Id est, si sint æquales, & angulos æquales comprehendant ipsas etiam Parabolas congruere; earúmque curuitatem in infinitum productam, eandem vtriusque futuram.

PROP. XXXI. THEOR.

Si linea quælibet A B bifariam & ad angulos rectos secetur in I à linea GH. Duabus autem lineis AB, AI tertia proportionalis statuatur IL. Erit AB latus rectum Parabolæ per puncta A,L, B transeuntis, cuius axis est LIG.

Figura Decimaoctaua.

Demonstratio.

Fig. 18. Cum tres lineæ AB, AI, IL sint continuè Proportionales ex hypothesi. Erit Quadratum mediæ AI æquale

æquale rectangulo ſub prima A B, & tertia I L. Si ergo Parabola A L B deſcribatur: erit ordinatim Applicata A B ad eius axem L I. cum bifariam in I & ad angulos rectos ſecetur à linea L I: & eius latus rectum erit A B. Siquidem hæc eſt lateris recti Parabolæ cuiuſuis, proprietas vt rectangulum ſub latere recto, & abſciſſa ſagitta per ordinatim Applicatam, æquale ſit Quadrato ordinatim Applicatæ ſagittam abſcindentis. Vnicam verò Parabolam per tria illa puncta A, L, B, deſcribi poſſe patet per Prop. 30. Præcedentem. Quare ſi linea quælibet, &c. Quod erat demonſtrandum.

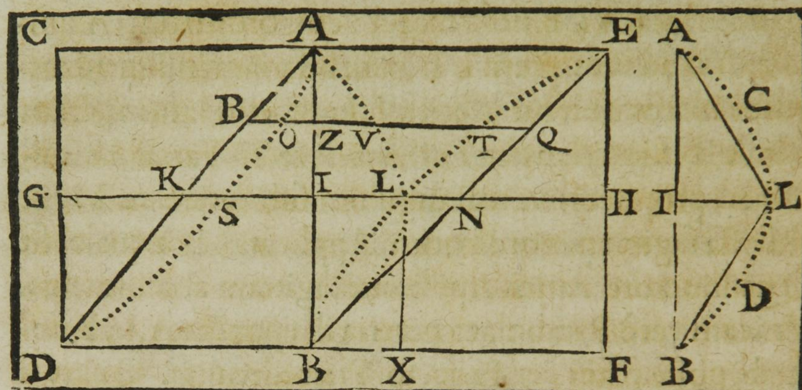
PROP. XXXII. THEOR.

In eadem figura. Si duo Quadrata A D, A F ſuper A B deſcribantur. Deſcribantur autem duæ Parabolæ; A S D, cuius axis ſit A C, vertex A; & B L E, cuius axis ſit B F, vertex B. Quarum latus rectum ſit A B, idem quod Parabolæ A L B ſuperiori propoſitione deſcriptæ. Dico haſce tres Parabolas A S D, A L B, B L E æquales eſſe, id eſt, ſi earum axes ſuperponantur; fore vt Parabolicus ambitus earum mutuò congruat à vertice in infinitum productus.

Præparatio.

Ducatur per L verticem Parabolæ A L B linea L X, ad eius axem I L perpendicularis. *Fig. 18.*

Figura Decimaoctaua.



Demonstratio.

Probandum in primis est, L X esse ordinatim Applicatam ad axem B F Parabolæ B L F. Atque adeo Parabolam hanc secare Parabolam A L B in ipso illius vertice L. Hoc ergo ita notum euadet. Sagitta I L est quarta pars lateris recti A B. Nam in Antecedente propositione. Ita est ex constructione A B ad A I, vt A I ad I L. Sed A B dupla est lineæ A I. Ergo A I dupla est etiam lineæ I L. Ergo A B siue B F quadrupla est lineæ I L siue B X. Si ergo per punctum X intelligatur duci ordinatim Applicata ad axem B F Parabolæ B E; (quam positione congruere necesse est cum linea X L, licet nondum constet congruere longitudine) ita se debet habere Quadratum Applicatæ F E ad Quadratum Applicatæ per X ductæ: vt se habet linea B F ad lineam B X. Sed B F ostensa est quadrupla lineæ B X. Ergo quadratum Applicatæ F E, quadruplum est quadrati Applicatæ per X ductæ. Quadratum

dratum autem Applicatæ F E, eſt quadruplum Quadrati lineæ L X, quæ lineæ F E ſemiſſis eſt; ergo ordinatim Applicata per X, non tantum poſitione congruit cum linea L X ſed etiam longitudine: hoc eſt, Parabola B E tranſit per L, verticem Parabolæ A L B. Quod cum ita ſit. Cum duarum Parabolarum A L B, B L E, ſumptis æqualibus ſagittis L I, B X æquales ſint ordinatim Applicatæ B I, L X: & æquales angulos, nempe rectos contineant: dubium non eſt quin Parabolarum ambarum curuitas ſit æqualis à vertice L & B in infinitum extenſa per Prop. 31. Cum verò par in omnibus ſit ratio Parabolarum A S D, & B L E, nec, niſi ſolo ſitu, qui ſubalternus eſt, diſcrepent. Concludendum eſt, trium illarum Parabolarum eandem eſſe curuitatem. Quod concludendum erat. *Fig.* 18.

RROP. XXXIII. THEOR.

Iiſdem in eadem figura poſitis: tribus ſcilicet deſcriptis Parabolis A S D, B L E, A L B, in eo ſitu intra Quadrata A D, A F, quo iam deſcriptæ ſunt. Dico ſolidum quod fit ex Parabolæ A L B ductu in ſe: æquari ſolido quod generatur ex ſuperficie mixta A S D B, in parem mixtam ſuperficiem B L E A ſubalterne poſitam.

Demonſtratio.

Hæc eadem eſt propoſitio: quam affert, & ſuo more accuratè demonſtrat Geometra, Prop. 42. lib. 10. vt conſtabit, vbi oſtendero Parabolam meam A L B eandem *Fig.* 18.

dem esse cum Parabola, quam ibidem descriptam supponit. Quod ita per Prop.31. Huius euidenter ostendo; Nam supponit ipse sagittam I L Parabolæ suæ tertiam esse proportionalem duabus A B, (siue G I) & A I. Hoc ego idem supposui Prop. præcedenti. Applicata verò illius, meáque est eadem A I ad eandem diametrum L I, & ambæ angulos æquales, nempe rectos continent. Ergo idem debet esse vtriusque Parabolæ
Fig. 18. ambitus, eadémque curuitas per citatam Propositionem nostram. Hoc demum ita declarato Propositionis huius demonstratio ex Authore peti debet: cum tota ex multis aliis eius principiis pendeat: quæ abs re fuerit hîc repetere, cum mihi solum exponendæ veniant propositiones, quæ proxime attingunt primariam illam, & ad quam tantùm opus totum refertur, ad circuli quadraturam, pertinentem.

PROP. XXXIV. PROBL.

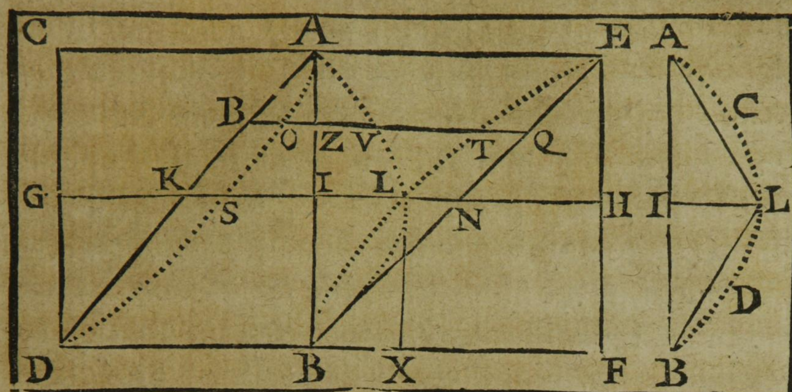
Solidum. Quod ex plano mixto A S D B ducto in planum mixtum B L E A, hoc est, in se subalterne positum, oritur; cubare, siue, in corpus planis, rectilineísque superficiebus circumscriptum mutare.

EXPOSITIO.

Fig. 18. Cum corpus ex illis mixtis superficiebus subalterne positis in se ductis genitum, æquale sit per Prop. 33. Corpori genito ex Parabola A L B in se ducta. Corporis verò illius dimidium sit vngula Parabolica vt supra

Prop. 29.

Figura Decimaoctaua.



Prop. 29. Exposui. Quam vngulam in cubum siue aliud solidum rectilineum mente sanè Archimedæa cõuertit Geometra, hîc ipse adeundus est, & ex eo problematis huius solutio repetenda: hic tamen proponenda; vt eam ad numerorum rationes clarè reducam: ex quibus totam hanc Quadraturam perpendere, mihi ab ipso primo exordio huius exercitationis fuit propositum. *Fig. 18.*

Exponatur ergo Parabola A L B, quæ in se ducta solidum generat: cuius semissis est vngula in corpus rectilineum commutanda. Ostendit Geometra Prop. 98. lib. 9. totam vngulam æqualem esse Pyramidi, cuius basis est triangulum A B L; & altitudo, est ipsius vngulæ altitudo; nempe in hoc casu, in quo diameter I L Parabolæ, est etiam axis; est ipse axis I L: & præterea segmento Cylindrico, cuius basis est segmentum Parabolicum A C L vel B D L: altitudo verò, I L, eadem cum altitudine vngulæ: & denique duabus quibusdam quantitatibus æqualibus inter se: & æqualibus, vt ostendit Prop. 97. Minori cuidam vngulæ bis sumptæ:

quæ reſecatur ad verticem totius vngulæ, plano ſecante: quod partem quartam altitudinis vngulæ abſcindit. Hanc verò minorem vngulam oſtendit Prop. 95. Eſſe vnam è triginta duabus partibus; in quas diuidi tota vngula concipi poteſt. Quibus ſtabilitis ignorari non poteſt vngulæ propoſitæ ſolida quantitas vel Geometricè, vel Arithmeticè (vt maxime intendo) inueſtigata.

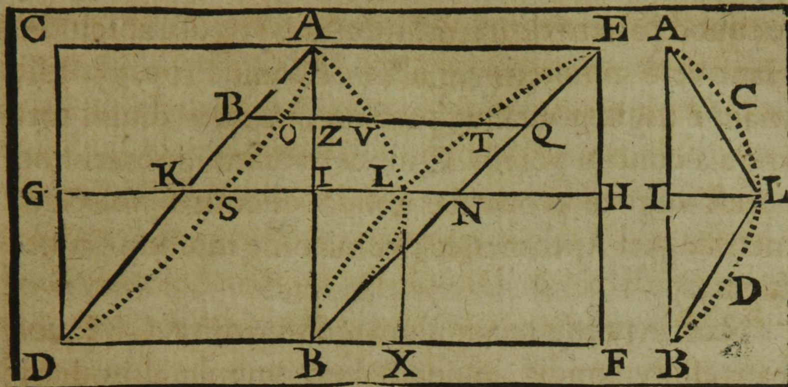
Nam in primis triangulum rectilineum A L B (quod baſis eſt Pyramidis, eiuſdem cum vngula altitudinis) notum eſt. Nota etiam eſt eius altitudo I L. Ergo nota eſt ipſa Pyramis.

Fig. 18. Secundò baſis Parabolica A C L ſegmenti Cylindrici, nota eſt in menſura rectilinea, eſt enim ſexta pars trianguli A L B rectilinei, cum enim oſtendat Archim. lib. 2. de Parabola. Prop. 24. & Geometra lib. 5. Prop. 232. Parabolam A C L B eſſe ſeſquitertiam trianguli A L B. Duo ſegmenta Parabolica A C L, B D L ſimul, ſunt tertia pars trianguli A L B. Ergo alterum eorum ſegmentorum, verbi gratia, A C L eſt ſexta pars eiuſdem trianguli. Atque adeo nota. Altitudo verò ſegmenti Cylindrici ſuper baſi A C L erecti, eſt I L nota. Ergo etiam nota eſt quantitas ſolida ſegmenti huius Cylindrici in rectilineis: mutata ſcilicet eius baſe Parabolica A C L in ſextam partem trianguli A L B.

Tertiò denique. Cum minor vngula ſupradicta, ſit vna ex triginta duabus partibus totius vngulæ, id eſt, ita ſe habeat ad totam vngulã, vt vnum ad triginta duo; ſi ea bis ſumatur (vt ſumi debet ad complendã totam vngulã

vnâ

Figura Decimaoctaua.



vnâ cum Pyramide & Cylindro Parabolico, de quibus *Fig. 18.* paulo ante dictum eſt) erit ad totam eandem vngulam, vt duo ad triginta duo. Et Diuidendo. Ita eſt vngula hæc minor bis ſumpta, ad id quod reliquum eſt ex tota vngula; id eſt, ad Pyramidem & ſegmentum Cylindricum ſimul; vt duo ad triginta; ſiue, vnum ad quindecim. Si igitur ſolida quantitas ex Pyramide, & ſegmento Cylindrico compoſita, iam nota; diuidatur in partes quindecim æquales; & vna ex illis addatur ad compoſitam quantitatem ex Pyramide & Cylindro; nota euadet totius vngulæ quantitas: ipſumque adeo ſolidum ex ductu planorum mixtorum in propoſitione aſſignatorum: ſi nimirum inuenta ſoliditas vngulæ duplicetur. Quomodo verò Geometricè Pyramis illa & Cylindrus Parabolicus in quantitatem vnicam coaleſcant; paſſim apud Geometras habetur; & notum euadet inferius: Vbi per numeros ſolutionem problematis aggrediar. Sed vtrouis modo poſitum Problema ſoluere placeat, Geometrico vel Arithmetico; quod

ſubdo theorema, maximum compendium allatu-
rum eſt.

PROP. XXXV. THEOR.

Pyramis, cuius Baſis eſt triangulum maximum ALB Parabolæ inſcriptum, ad Cylindrum, cuius Baſis eſt ſegmentum ACL Parabolicum; altitudo verò vtriuſque eſt eadem, nempe IL, habet proportionem duplam.

Demonſtratio.

Fig.18. Nam Priſma, cuius baſis eſt triangulum ALB, idem quod baſis eſt Pyramidis: altitudo verò vtriuſque eadem IL: eſt triplum Pyramidis per 7. lib. 12. Quia vero ſegmentum Parabolicum ACL oſtenſum eſt Prop. 34. num. 2. eſſe partem ſextam trianguli ALB. Erit Priſma ſextuplum Cylindri eiuſdem altitudinis ſuper baſi Parabolica ACL. Ergo Pyramis erit eiuſdem Cylindri dupla. Quod erat probandum.

PROP. XXXVI. PROBL.

Solidum, Quod Prop. 34. Geometrice inueſtigatum eſt, in numeris notum facere.

Conſtructio.

Fig.18. Eadem exponatur Parabola ALB quæ in ſe ducta ſolidum, quod inueſtigatur, producit. Quod, vt ſupra citata propoſitione expoſui, duas continet vngulas Parabolicas. Quarum vnam, quod ſatis eſt, cum
ſint

ſint æquales; in ſolidum rectilineum paulo ante conuerti. Iiſdem ergo omnibus ſuppoſitis quæ Prop.34. ſupponebantur. Poſito ſcilicet latere recto A B : & linea I L tertia proportionali duabus datis A B, A I. Ita Arithmeticè Problema ſoluemus.

Poſita A B partium 2. eius ſemiſſis A I erit 1; & I L, cum his duabus tertia ſit proportionalis, erit $\frac{1}{2}$. Ex his datis, quod quæritur definiendum eſt; inuentis ſcilicet, Pyramide cuius baſis eſt triangulum A L B, & altitudo I L : Cylindro Parabolico, cuius baſis eſt ſegmentum Parabolicum A C L, & altitudo eadem I L. Denique parte decimâ quintâ aggregati ex Pyramide & Cylindro : quæ eidem aggregato addatur ad totam vngulam complendam Ex his enim tribus quantitatibus conſtat, vt Prop. 34. Expoſitum eſt. Pyramis habetur, ducta A I. 1, in I L $\frac{1}{2}$ vt habeatur area trianguli A L B, ſiue baſeos Pyramidis, $\frac{1}{2}$. Huius areæ tertia pars eſt $\frac{1}{6}$. Quæ ducta in altitudinem I L $\frac{1}{2}$ gignit $\frac{1}{12}$ ſoliditatem Pyramidis. *Fig.18.*

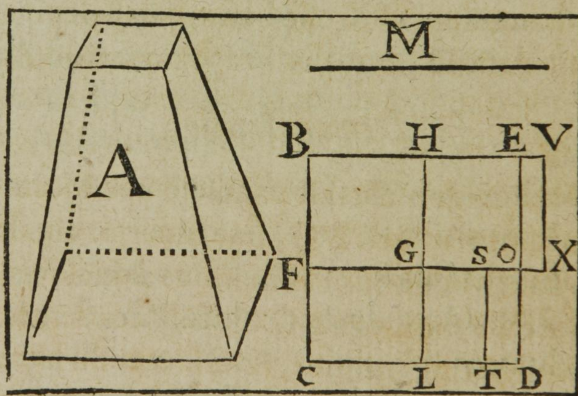
Cylindrus Parabolicus baſeos A C L, & altitudinis I L. Eſt dimidia pars Pyramidis, vt Propoſitione Antecedente oſtendi, ergo Cylindrus ille eſt $\frac{1}{24}$. *Fig.18.* Pyramis $\frac{1}{12}$ & Cylindrus $\frac{1}{24}$ ſimul efficiunt $\frac{3}{24}$ ſiue, aſſumptis minimis terminis $\frac{1}{8}$. Huius decima quinta pars eſt $\frac{1}{120}$ hæc addita ad $\frac{1}{8}$ Pyramidem & Cylindrum ſimul, producit $\frac{16}{120}$ ſiue, $\frac{2}{15}$ pro ſoliditate tota vngulæ. Hæc duplicetur : habebitur $\frac{4}{15}$ ſoliditas corporis ex Parabola A L B in ſe ducta, geniti. Quod idem eſt, cum eo; quod producitur ducta ſuperficie

mixta ASDB; in mixtam superficiem BL, EA, siue in se subalterne positam. Solidum ergo, quod &c. notum in numeris fecimus.

PROP. XXXVII. PROBL.

Fig.19. Trapezium solidum, siue truncatam Pyramidem: cuius duæ oppositæ facies Quadratæ sint & parellelæ; ex notis lateribus, & altitudine; notam facere Geometricè, & Arithmeticè.

Figura Decimanona.



Constructio.

Datum sit Trapezium solidum A eius Rationis; quæ in propositione assignatur, cuius altitudo sit M. Soliditas eius Geometricè quæritur: id est. Quæritur Parallelepipedum ei æquale. Quod cum sit regulare; & ad formam cubi (qui solidorum mensura est) accedat, & in illum mutari debeat; tunc Geometricè aut notum, aut nosci aptius erit. Exponatur eius basis Quadrata BD: in qua superior facies ei opposita, item Quadra-

ta deſignetur BG, & productis eius lateribus FG, & HG vſque ad O & L, erit Quadratum GD: cuius latus LD, eſt exceſſus lateris CD baſeos, ſupra latus CL ſiue FG faciei, ſuperioris oppoſitæ. Diuidatur Quadratum GD in tres partes æquales, diuiſo eius latere GO trifariam cuius OS ſit pars tertia: ductáque ST parallela lateri GL. Deinde tribus lineis, EO, lateri minoris Quadrati; OD, differentiæ laterum; SO, tertiæ parti huius differentiæ; quarta proportionalis inueniatur. cui æqualis ponatur OX & EV: ducta etiam VX. Dico rectangulum BX eſſe baſim parallelepipedi, ſub altitudine data M, æqualis Trapezio ſolido A.

Demonſtratio.

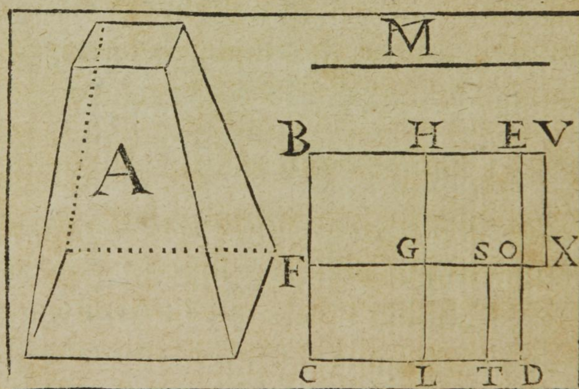
Trapezium A maius eſt parallelepipedo, cuius baſis eſt Quadratum minus BG, ſiue ſuperior eius facies, & altitudo data M; duobus Priſmatibus æqualibus, quorũ baſes ſunt duo rectangula GC, GE contenta ſub latere GF minoris Quadrati, & GL exceſſu lateris maioris Quadrati GD, ſupra minus CL; & præterea Pyramidi, cuius baſis eſt quadratum GD. Sed duo illa Priſmata ſimul, æqualia ſunt parallelepipedo; cuius baſis eſt rectangulum HO; & altitudo eadem nempe M. Pyramis verò cum ſit per 7. lib. 12. Tertia pars parallelepipedi; cuius baſis eſt Quadratum GD & altitudo M: erit parallelepipedum cuius baſis eſt rectangulum SD, (tertia ſcilicet pars Quadrati GD) & altitudo M, æquale huic Pyramidi. Sed per 32. lib. 11. Parallelepipedo aliud æquale eſt Parallelepipedum, eiuſdem altitudinis *Fig.* 19.

M:

M: cuius basis est rectangulum E X. Nam duo rectangula E X, S D æqualia sunt per 16. lib. 6. Contenta scilicet sub duabus extremis E O, O X, & sub duabus mediis S T; S O quatuor proportionalium. Inuentum est ergo Parallelepipedum dato corpori A æquale. Quod notum Geometrice facere propositum erat.

Fig. 19. Sed Arithmeticè hoc idem præstabimus ex iisdem datis, lateribus scilicet Quadratorum & altitudine M.

Figura Decimanona.



Sit in primis data altitudo M. 10. Latus verò maius BE, 7. Cuius Quadratum BD est 49. Latus minus BH 4. Cuius Quadratum 16. Differentia laterum B E, B H; est H E 3, cuius Quadratum G D 9. Ablato ergo Quadrato B G 16 ex Quadrato BD 49: remanet gnomon
Fig. 19. H D F 33. Ablato item ex gnomone, Quadrato G D 9: remanent duo rectangula æqualia G E, G C 24. Ergo alterum ex illis nempe G E, est 12. Quod cum Quadrato G B 16, efficit rectangulum B O, 28: cui addendum est rectangulum S D, vel ei æquale E X tertia scilicet pars Quadrati G D 9, quæ est 3. Fiet ergo area totius

totius rectanguli BX 31. Quæ ducta in altitudinem datam M 10. Fiet tota soliditas corporis A, 310.

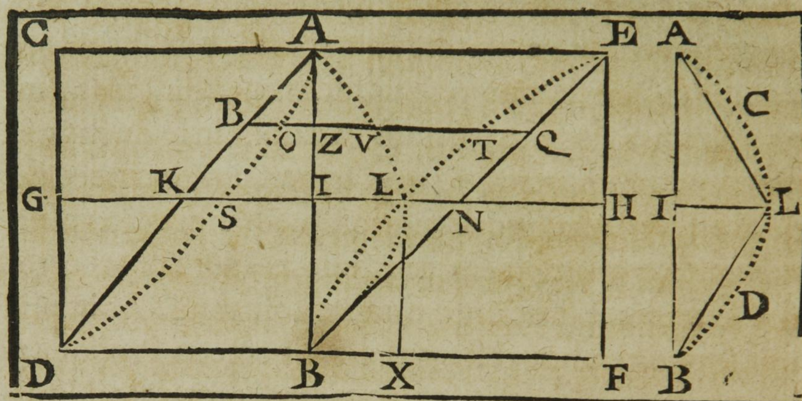
Tota ergo ratio huiusmodi truncatas Pyramides per numeros inuestigandi, paucis hoc modo tradi potest. Ducatur latus BF minoris Quadrati, in maioris latus BE: & rectangulo facto FE addatur SD tertia pars Quadrati GD, differentiæ laterum, vt fiat totum rectangulum BX: Quod in altitudinem corporis A ducatur. Fiet enim Parallelepipedum æquale corpori A. Huius præcepti demonstratio illa ipsa est; quam ad methodum Geometricam soluendi Problematis paulò ante exposui.

PROP. XXXVIII. PROBL.

Si in figura Propositionis 31. hic repetita ducantur duæ quælibet Parallelæ OT, SL (licet hæc sit axis Parabolæ ALB) secantes in O & T; item in S & L, duas Parabolas subalterne positas Parabolam veró ALB, in V & L. Et denique ordinatim Applicatam AB, in Z & I. Et oporteat solidam quantitatem reperire tum Geometricè, tum Arithmeticè corporis: quod fit ex ductu mixtæ superficiei contentæ lineis rectis OZ, ZI, IS & Parabolica OS; in mixtam superficiem clausam lineis rectis TZ, ZI, IL & Parabolica TL. *Fig.18.*

Huius ferè solius Problematis causa, ea omnia à me tradita sunt: quæ hactenus ę Geometria repetij tan- *Fig.18.*

Figura Decimaoctaua.



quam lemmata ad huius ſolutionem neceſſaria. Licet enim Geometra vngulam Parabolæ in cubum conuertiſſet, cum ordinatim Applicata Parabolam abſcindens, eſt recta ad ſuam diametrum, quæ tunc axis etiam eſt Parabolæ. Qualis eſt hic Parabola A L B, ab ordinatim Applicata A B Orthogonâ ad axem L I, abſciſſa. Attamen nuſquam apud eum reperire licuit mentionem eius Parabolæ, quæ ab obliqua ordinatim Applicata
Fig.18 abſcinditur. Superioribus ergo Propoſitionibus aliquot, nempe, 22, 23, 24, &c. quamcumque obliquam Parabolam in ſe ductam ſolidum generare conatus ſum oſtendere; quod æquale foret ſolido genito ex alia Parabola, quam ordinatim Applicata ad axem, abſcinderet. Oſtendi præterea quænam partes quarumcumque Parabolarum obliquarum, in ſe ductæ; corpus producerent æquale corpori, quod fieret ex ductu in ſe partis, Parabolæ ad axem abſciſſæ. Nunc verò eo deuolutus ſum, vt partes ipſas Parabolæ ad axem poſitæ,

abſque

absque omni ad alias relatione persequar; & quale corpus in se ductæ producant, inuestigem. Neque enim statim vbi vngulam ex tota Parabola in se ducta profectam in cubum conuerteris: eadem opera singulas partes vngulæ à singulis partibus Parabolæ in se ductis genitas, notas effeceris. Quod tamen omnino necessarium est, vt noua hæc circulum Quadrandi ratio absoluatur; tum etiam vt eiusdem veritas, aut falsitas certa fiat & aperta. Hunc ergo nodum soluamus. Ac in primis supponendum est; quod à Geometra Propos.42. lib.10. eiusque corollario primo est obseruatum. Nimirum non tantum Parabolam ALB in se ductam producere solidum æquale solido genito ex ductu superficiei mixtæ ASDB, in mixtam superficiem BLEF: sed etiam quaslibet duas parallelas, quales sunt OT, SL; intercipere ex dictis superficiebus partes mixtas OZIS, TZIL; quæ in se ductæ producant corpus æquale corpori, quod oritur ex parte ZVLI Parabolæ ALB, inter easdem parallelas interceptâ, in se ductâ. Inuestigamus ergo hoc Problemate solidam quantitatem partis huius ZVLI in se ductæ.

Constructio & Demonstratio.

Exponatur in altera figura confusionis vitandæ causa, Parabola ALB; ductis in ea parallelis ILZV: quæ ad libitum duci possunt; in hoc tamen exemplo ita ducuntur, vt IL sit axis; altera verò ZV bifariam in Z, secet ordinatim Applicatam AI: tandem ducantur VL; & VX parallela Applicatæ AI, siue perpendicularis ad *Fig.20.*

Fig. 20.

axem IL in hoc caſu aſſumpto in exemplum. Huc in primis reuocanda eſt Propoſitio ductuum, in qua ductibus Applicatur Propoſitio 4. lib. 2. Eucl. Probatúrque in noſtra hypotheſi ſolidum factum ex toto plano mixto Z V L I in ſe ducto, æquale eſſe, & ſolidis quæ ex partibus V Z I X, V X L dicti plani in ſe ductis generantur; & ſolido quod fit bis, ex rectangulo V I ducto in ſemiſegmentum V L X: non ſecùs ac ſi linea quæpiam diuidatur in duas partes. Si tota linea in ſe ducatur Quadratum generat, cui æqualia ſunt Quadrata partium in ſe ductarum vnâ cum rectangulo bis, quod fit ex vna parte ducta in alteram. Quod principium in his maximè obſeruatum velim; eo enim ſæpius vti neceſſe futurum eſt. Iam, in ſe ducatur rectangulum Z X, poſita baſi ſiue principio motus, eius latere Z I. Fiet ex hoc ductu parallelepipedum. Ducatur deinde ſemiſegmentum Parabolicum V L X in idem rectangulum Z X, bis. Fiet corpus quoddam mixtum Cylindricum Parabolicum: cuius baſis eſt ſemiſegmentum V L X; altitudo verò I X vel Z V bis ſumpta. Et quia nota eſt baſis V L X in rectilineis. Fiat ei æquale rectangulum, cuius vnum latus ſit V X; & ſuper hoc rectangulum tanquam baſim erigatur Parallelepipedum, cuius altitudo ſit I X bis ſumpta, vel rectangulum ſiue baſis duplice

duplicetur, & ſumatur altitudo I X ſemel tantùm: fiet per Propoſ.9. lib. 12. parallelepipedum priori æquale. Vtrouis autem modo generetur parallelepipedum; ad iam factum primum parallelepipedum applicari poterit iuxta faciem Z X quæ in vtroque reperitur, atque ita ex duobus vnicum parallelepipedum conflari. Sed reſtat vt ducatur ſemiſegmentum V L X in ſe, vt totum habeatur corpus ex totâ mixtâ figurâ Z V L I in ſe ductâ genitum: illud autem notum fiet, ſi producta V X, donec Parabolæ occurrat in S. Segmenti V L S vngula, in ſolidum rectilineum conuertatur per Propoſ.34. Eſt enim vngula totius ſegmenti V L S æqualis corpori facto ex ductu in ſe ſemiſegmenti V L X: tam enim vngula ſegmenti V L S, quam corpus ex ſemiſegmento V L X in ſe ducto genitum, eſt dimidia pars corporis ex ductu totius ſegmenti V L S in ſe, geniti: vt expoſui ſuprà Prop.29. habito verò rectilineo corpore, æquali corpori, quod ſemiſegmentum V L X in ſe ductum producit; Applicabitur illud vt Geometria docet, ad ſuperius iam formatum parallelepipedum: vt vnicum fiat parallelepipedum æquale corpori. Quod mixta figura Z V L I in ſe ducta producit. Quod hac propoſitione fieri iubebatur. *Fig.20.*

Poterat etiam ita Problematis ſolutio iniri, vt Trapezium Z V L I in ſe duceretur; & inde corpus genitum, per Prop. 37. in parallelepipedum conuerteretur. cui addi deberet corpus ex ſegmento Parabolico V T L ducto in Trapezium Z V L I bis; vel in rectangulum, cuius baſis eſt, Z I, & altitudo compoſita ex lateribus *Fig.20.*

IL, ZV Trapezij (eſt enim rectangulum hoc æquale duplo Trapezij Z V L I) iiſque ſolidis duobus, tandem corpus ex ſegmento V T L in ſe ducto genitum, adiungeretur. Fierétque ita notum in rectilineis ſolidum ex mixta figura Z V T L I in ſe ducta genitum.

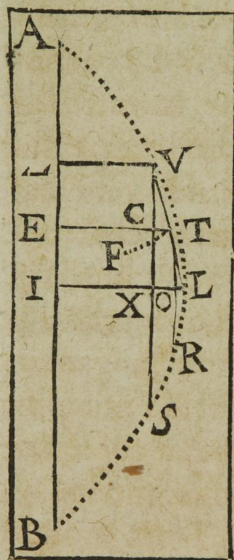


Fig. 20.

Ne cui verò negotium faceſſat ductus ille ſegmenti Parabolici V T L in rectangulum duplum Trapezij Z V L I cum lineæ V L, æqualis non ſit baſis Z I, vnde motus iniri debet: quod tamen neceſſarium eſt ad ductum figuræ in figuram; in memoriam & vſum hic reuocanda ſunt quæ ſuprà Propoſ. 23. Oſtendi: nimirum ſegmẽta illa omnia Parabolica æqualia eſſe, quæ diametris æquali inter ſe ſpatio diſtantibus intercipiuntur; & præterea in ſe ducta, ſolida æqualia producere iuxta Propoſitionẽ 28. Quare diuidatur V L bifariam in F (ob loci anguſtias F ad punctum diuiſionis non apponitur, ſed ad illud lineola connectitur) & per F ducatur F T diameter Parabolæ axi L I parallela: quæ bifariam ſecabit in C rectam V X per 2. lib. 6. Deinde ex puncto T ducatur T O ordinatim Applicata ad axem: erit T O æqualis rectæ C X; atque adeò rectæ C V. Cum igitur V C & T O metiantur diſtantiam punctorum V & T à ſuis diametris T E, L I; æqualia erunt ſemiſegmenta V T F, & T L O: etſi in ſeipſa ducantur; æqualia ſolida generabunt

bunt iuxta Propositionem 28. eiusque Corollarium: imò & ipsa integra segménta suo in se ductu singula, exhibebunt solida inter se æqualia. Ad hæc Applicata T O producta vltra axem donec occurrat Parabolæ in R, erit æqualis lineæ V X, siue lineæ Z I, quæ est basis Trapezij Z V L I, vnde motus incipit: quare segmentum T L R duci poterit in Trapezium Z V L I, appositâ T R, Trapezij basi Z I, cui est æqualis, & orietur ex eo ductu Cylindraceum quoddam Parabolicum, cuius basis erit ipsum segmentum T L R; altitudo verò maior, erit I L, minor Z V. Sed quia bis sumi debet solidum ex segmento V T L, aut ei æquali T L R ducto in Trapezium Z V I L; solidum illud vnica operâ habebitur; si duo inæqualia latera Z V, I L simul iungantur, & in rectangulum, cuius vnum latus est Z I, alterum verò ex duobus lateribus Z V, I L Trapezij conflatur, ducatur segmentum T L R. Fiet enim hoc modo Cylindraceum, cuius basis est segmentum T L R, notum in rectilineis; altitudo verò conflata ex notis lateribus *Fig.* 20 Z V, I L Trapezij, atque adeo nota, notúmque ex his solidum ipsum Cylindraceum. Quod ad solidum ex ductu Trapezij in se, & ad solidum ex ductu segmenti T L R etiam in se, iungetur vt fiat vnicum solidum, quod oritur ex ductu in se plani mixti Z V T L I, cuius quantitas nota erit, cum singulæ eius partes in rectilineis notæ fieri possint. Quod si segmentum V T L sui extremo L, axi ipsi L I non adhæreat: poterit nihilominus, ei æquale ad axem fieri segmentum T L R sumpta sagitta L O æquali sagittæ T F, ductáque

Appplicata

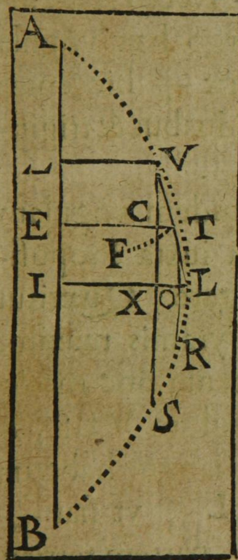
Applicata T R sunt enim in Parabola, illa omnia segmenta æqualia, quorum sagittæ sunt æquales per Prop. 24. Huius. Ex hac constructione Geometrica Arithmeticam colligemus in eum qui sequitur modum.

Fig. 20. Seruata ergo eadem suppositione propositionis 34. & 36. Posito scilicet latere Recto A B. & eius dimidio A I. Vnde fit, vt IL sit quarta pars lateris Recti, vt Propos. 32. est demonstratum. Supponamus parallelam Z V bifariam diuidere in Z, ordinatim Applicatam A I. Quibus ita constitutis. Assumo, vt prius Prop. 36. assumpsi, A B latus Rectum esse 2. erit A I. 1. & I L $\frac{1}{2}$. Erit ergo Z I etiam $\frac{1}{2}$ quandoquidem semissis est Applicatæ A I, quæ est 1. Quia verò V X æqualis est lineæ Z I. per 34. lib. 1. in rectangulo Z X; erit & ipsa V X $\frac{1}{2}$. Restant L X & I X cognoscendæ; quas sic venabimur. Vt se habet Quadratum A I, quod est 1. Ad Quadratum lineæ V X $\frac{1}{2}$, quod est $\frac{1}{4}$: ita se habet linea I L $\frac{1}{2}$ ad lineam X L per Prop. 20. lib. 1. Appollini. Ergo X L, est $\frac{1}{8}$, quæ si dematur ex tota I L $\frac{1}{2}$: remanebit I X, & illi æqualis Z V $\frac{3}{8}$. His omnibus habitis, quæ in Synopsim memoriæ causa reduco.

A B —	2	I X }	$\frac{3}{8}$
A I —	1	Z V }	
I L —	$\frac{1}{2}$	X L —	$\frac{1}{8}$
Z I —	$\frac{1}{2}$		

Rectangulum Z X sub lateribus IZ, $\frac{1}{2}$ & I X $\frac{3}{8}$ est $\frac{3}{16}$. Rectangulum hoc duci debet in se; duci, inquam, iuxta ductuum doctrinam, debet scilicet rectangulum rectangulo Z X æquale super

ſuper baſim Z I erigi perpendiculariter ad Z X: tum fluere donec ad latus oppoſitum V X peruenerit. Quo fluxu parallelepipedum efformatur; cuius baſis eſt rectangulum Z X $\frac{3}{16}$ proximè inuenta. Altitudo verò eſt recta I X $\frac{3}{8}$. Si igitur baſis $\frac{3}{16}$ multiplicetur in altitudinem $\frac{3}{8}$ fiet ſoliditas huius parallelepipedi $\frac{9}{128}$. huic parallelepipedo $\frac{9}{128}$ addi debet ſolidum duplex; nempe ſolidum quod fit ex ductu ſemiſegmenti V L X in rectangulum Z X bis. Deinde ſolidum genitum ex eodem ſemiſegmento ducto in ſe



Primum ſic notum fiet. Inquiratur area ſemiſegmenti V L X hoc modo. Ad lineam V X $\frac{1}{2}$ addatur vna tertia eius pars (quæ eſt $\frac{1}{6}$.) Fiet linea compoſita $\frac{2}{3}$. eius ſemiſſis $\frac{1}{3}$ ductus in L X $\frac{1}{8}$; exhibet, vt paulò poſt demonſtrabo, aream ſemiſegmenti V L X $\frac{1}{24}$. Hæc ergo area ducta bis in altitudinem I X $\frac{3}{8}$ hoc eſt, in I X duplicatam (hoc eſt $\frac{3}{4}$) producet ſolidum ex eo ductu genitum $\frac{3}{95}$ ſiue $\frac{1}{32}$. Quod autem ſemiſſis lineæ compoſitæ ex V X & tertia eius parte, ſi ducatur in X L producat aream ſegmenti V L X, probatur. Nam ſicut totum ſegmentum V L S eſt ſeſquitertium trianguli V L S. Ita ſemiſegmentum eſt ſeſquitertium trianguli V L X. Sed area trianguli cuius baſis eſt ſeſquitertia ad lineam V X & altitudo X L eſt etiam Fig. 20.

ſeſquitertia areæ trianguli V L X. Ergo, &c.

Secundum verò nempe ſolidum ex ductu ſemiſegmenti V L X in ſe, genitum in hoc exemplo breuiter definietur ope vngulæ Prop. 36. in ſolidum rectilineum conuerſæ. Cum enim, vt paulò ante demonſtraui, linea X L ſit quarta pars diametri L I totius ſegmenti A L I. Erit vngula ſegmenti V L S minoris, ad vngulam ſegmenti A L B maioris vt 1. ad 32. vt Prop. 95. lib. 9. Geometra demonſtrauit. Vngula autem ſegmenti A L B reperta eſt ſuperius Prop. 36. eſſe $\frac{2}{15}$ poſito latere Recto A B 2. ſicut hic ponitur. Ergo hæc vngula ſegmenti V L S, erit $\frac{1}{140}$ hic enim numerus eſt vna ex duabus & triginta partibus numeri $\frac{2}{15}$.

Fig. 20

Verum iuuat eandem vngulam methodo vniuerſali iuxta Propoſitionem 36. inueſtigare. Quæritur ergo primo loco Pyramis maxima intra vngulam contenta hoc modo. eius baſis eſt triangulum V L S, & altitudo X L, area trianguli habetur, ducta V X $\frac{1}{2}$ in X L $\frac{1}{8}$ vt fiat $\frac{1}{16}$.

Fig. 20. Hæc baſis ducta in altitudinis X L $\frac{1}{8}$, partem tertiam $\frac{1}{24}$, gignit $\frac{1}{384}$ ſoliditatem Pyramidis.

Cylindrus Parabolicus ſupra ſegmentum V T L eſt ſemiſſis Pyramidis per Propoſ. 35. Ergo eſt $\frac{1}{768}$.

Cylindrus cum Pyramide additus producit $\frac{3}{768}$ ſiue, in minimis terminis $\frac{1}{256}$. Huius ſolidi decima quinta

pars

pars, $\frac{1}{40}$ iuxta præſcriptum Propoſitionis 34, addi debet ad Cylindrum & Pyramidem ſimul, id eſt, ad $\frac{3}{768}$ vt tandem producatur peracta operatione $\frac{1}{240}$ ſoliditas vngulæ ſegmenti V L S: eadem, quæ præcedenti ſolutione inuenta fuerat, quæ eadem eſt cum ſoliditate, quam ſemiſegmentum V L X in ſe ductum producit. Hæc enim duas ſemiungulas ſemiſegmenti V L X continet. Hoc eſt, totam vngulam totius ſegmenti V L S.

Addamus iam tria hæc inueſtigata ſolida nimirum rectanguli Z X in ſe ducti. quod eſt $\frac{9}{128}$, ſemiſegmenti V L X bis ducti in rectangulum Z X. quod eſt $\frac{1}{12}$ & ſemiſegmenti eiuſdem V L X in ſe ducti. quod eſt $\frac{1}{240}$. Producetur corpus $\frac{331}{3840}$ ex ductu figuræ mixtæ Z V L I in ſe, vt peracta horum numerorum additione & reductione cõſtabit. Hic ergo numerus ſeponatur $\frac{331}{3840}$, & diligenter obſeruetur hinc olim repetendus.

PROP. XXXIX. PROBL.

Aſſumptis ex figura Propoſitionis 31. Quadratorum duorum diametris A D, E B & duabus parallelis R Q, K N ſecantibus axem in Z & I. Solidum inueſtigare, quod producitur ex Trapezio R Z I K in Trapezium Z Q N I ducto. *Fig. 21.*

Conſtructio.

Expediatur lucis gratiâ ex figura Propoſitionis 31. *Fig. 21.* Deſcriptio ſola hic neceſſaria in Propoſitione aſſignata, & præterea ducantur R L, N H; axi A B parallelæ.

Figura Vigeſimaprima.

Solidum quod hic quæritur, gigni debet ex rectangulo R I, in rectangulum Z N. Item ex eodem rectangulo R I in triangulum H Q N. Et ex triangulo R L K tam in rectangulum Z N, quam in triangulum H Q N ſubalterne poſitum per Applicationem adductus, Propoſitionis huius ad Propoſitionem 1. lib. 2. Eucl. afferri ſolitæ ex Commandino. Si duæ ſecentur vtcumque: rectangulum ſub totis æquale eſt rectangulis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius & quolibet ſegmentorum alterius continentur.

Fig. 21. Solidum ex rectangulo R I, in rectangulum Z N ducto notum eſt: eſt enim parallelepipedum notis lateribus conſtans. Solidum verò ex eodem rectangulo R I in triangulum H Q N ducto: Priſma eſt triangulare, cuius baſis eſt triangulum H Q N: & altitudo Z R vel I L: eadem videlicet cum altitudine ſolidi ex rectangulo R I in rectangulum Z N geniti. Vnde fit, vt ſi H Q bifariam diuidatur in S, & per S ducatur lineæ H N parallela S O, productam lineam I N ſecans

in

in O. Solidum cuius basis est rectangulum H O; & altitudo Z R; æquale sit triangulari illi Prismati: & præterea applicetur ad parallelepipedum ex rectangulo R I in Z N genitum, & vnicum cum illo parallepipedum constituat. Quod applicetur, clarum est. Quod æquale Prismati sit triangulari; ne id quidem obscurum est: sunt enim bases, rectangulum scilicet H O & triangulum H Q N æquales, & eadem altitudo. Ergo per 7. lib. 12. sunt duo illa solida æqualia. Potest ergo vnico ductu solidum haberi, genitum ex rectangulo R I in rectangulum Z N & in triangulum H Q N: si semissis H S lineæ H Q, addatur ad Z H: vt fiat vnicum rectangulum ex Trapezio Z Q N I in quod ducatur rectangulum R I. *Fig. 11.*

Restat vt ducatur triangulum R K L in rectangulum Z N. Et in triangulum H Q N, vt solidum habeatur, quod ad iam factum parrallelepipedum applicetur. Triangulum R K L ductum in rectangulum Z N producit Prisma triangulare: cuius basis est triangulum R K L, & altitudo Z H. cui est æquale parallelepipedum cuius basis est rectangulum æquale triangulo R K L siue H Q N, hoc est, rectangulum H O, & altitudo Z H. solidum verò ex triangulo R K L, in triangulum subalterne positum H Q N est sexta pars parallelepipedi; cuius basis est quadratum lineæ HQ & altitudo H N vel H Q (æquales enim sunt) vt ostendi Prop. 20. Coroll. 2. hæc postrema solida duo ex præceptis Geometricis facile ad parallelepipedũ paulò ante iam efformatum applicabuntur, vt vnum integrum *Fig. 1.*

Figura Vigesimaprima.

parallelepipedũ constituatur ex ductu Trapezij RZIK in Trapezium ZQNI Quod Geometricè præstandum erat. Nunc idem per numeros inuestigemus.

Fig. 21. Supponitur hic eadem partium quantitas, quæ in Antecedente propositione assumpta est. Ponitur scilicet AB partium 2. AI eius semissis 1: qua bifariam diuisa in Z; erit ZI $\frac{1}{2}$: cui sunt æquales RL, HN, SO: Imò & RZ, KL & HQ. Nam in triangulo AZR rectangulo angulus RAZ est semi-rectus; eò quod AD sit diameter quadrati ABD. Ergo & angulus ARZ semirectus erit per 32. lib. 1. æquales ergo sunt lineæ ZA siue ZI & ZR, æquales eodem iure erunt LR, LK: æquales item HN, HQ. Quo fit vt IL sit etiam iisdem æqualis; & IK bifariam sit diuisa in L. Ergo tandem HS. (Quæ semissis ponitur lineæ HQ) erit $\frac{1}{[illegible]}$.

Fig. 21. His declaratis, quæ in vnum synopsis hæc colligit: Ita per numeros ducemus Trapezium RZIK in Trape

AB	2	IZ	
AI, IK	1	IL, LK, &c.	$\frac{1}{2}$
HS	$\frac{1}{4}$		

Trapezium Z Q N I. Vtroque in easdem partes diuiso, in quas supra diuisum est. Cum rectanguli Z I, duo latera Z I, Z R æqualia paulò ante ostensa, sint $\frac{1}{2}$: eius area erit $\frac{1}{4}$ quam producit numerus $\frac{1}{2}$ in se ductus. Hæc area ducta in I N, 1, altitudinem solidum gignit $\frac{1}{4}$. Ducatur rursus rectangulum Z L $\frac{1}{4}$ in triangulum H Q N, siue, in rectangulum illi æquale H O, hoc est ducatur rectangulum Z L $\frac{1}{4}$ in altitudinem H S $\frac{1}{4}$. Fiet solidum $\frac{1}{16}$. Addantur duo hæc solida $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$: producetur per additionem $\frac{5}{16}$ solidum ex rectangulo Z L, in Trapezium Z Q, N I ducto. Quod idem haberetur (vt supra monui) si rectangulum Z L $\frac{1}{4}$ ducatur in altitudinem integram Z S $\frac{5}{4}$ compositam ex Z H 1, & H S $\frac{1}{4}$ hoc enim modo idem numerus $\frac{5}{16}$ obtinebitur. Restat triangulum R K L ducendum in Trapezium Z Q N I. Hoc est in rectangulum Z N, & in triangulum subalternum H Q N. Primò ergo triangulum R L K, in rectangulum Z N, producit prisma triangulare, vt supra dixi, cuius soliditas habetur ex area trianguli velut basi ducta in altitudinem Z H. Area trianguli R L K est æqualis rectangulo H O (sunt enim duo triangula R L K, H N Q æqualia huic verò æquale factum est Geometricè rectangulum HO) quæ fit ex H S $\frac{1}{4}$ in H N $\frac{1}{2}$. Ergo ea est $\frac{1}{8}$. quam si altitudo Z H, multiplicet; producetur $\frac{1}{8}$ soliditas Prismatis : cuius basis est triangulum R L K, & altitudo Z H.

Fig. 21.

Fig. 22.

Trian

Triangulum verò idem R L K ductum in triangulum H N Q subalterne positum; gignit solidum: quod est sexta pars (vt Prop. 20. Coroll. 2. ostendi) solidi; cuius basis est rectangulum comprehensum sub lateribus triangulorum subalternorum (quæ latera L K, H Q sunt in nostro casu, æqualia) & altitudo, linea communis, quæ ductûs initium est, vt hic R L vel H N. Quare ducatur KL $\frac{1}{2}$ in HQ $\frac{1}{2}$; fiet $\frac{1}{4}$ basis solidi Ducatur hæc basis $\frac{1}{4}$ in R L $\frac{1}{2}$ altitudinem habebitur $\frac{1}{8}$ solidum: cuius sexta pars est $\frac{1}{48}$, soliditas scilicet *Fig.* 21. per Prop. 20. huius trianguli R L K, ducti in triangulum H N Q subalterne positum. quæ si addatur ad soliditatem $\frac{1}{16}$ productam ex triangulo R L K in rectangulum Z N: habebitur soliditas tota, absolutis operationibus, $\frac{1}{12}$ in minimis terminis, quam producit triangulum R L K ductum in Trapezium Z Q N I.

Iam verò addi debet proxime inuēta soliditas $\frac{1}{12}$ ad superiùs inuentam $\frac{5}{16}$: vt fiat $\frac{19}{48}$ soliditas producta ex Trapezio R Z I K in Trapezium Z Q N I. Quam numeris exprimere propositum erat. Hic etiam numerus $\frac{19}{48}$ seponatur olim consulendus.

PROP. XL. THEOR.

Fig. 22. Sint duæ Parabolæ A S D, B L E: quarū vertex sit A & B; latus rectum A B: cui æquales ponantur A E, B D ad ipsum latus rectum normales in A & B: & ducantur A D, E B. Vt habet Propositionis 31. hypothesis. Ducantur deinde binæ parallelæ quæcunque, quouis spatio inter se dissitæ,

Figura Vigeſimaſecunda.

ſitæ, vt RQ,KN.& binæ iterum parallelæ quæcumque RN (hæc iterum nõ ſine cauſa aſſumitur inferiùs aperiẽda) FM, eadẽ quâ priores RQ, KN diſtantia quæ rectam AD ſecent in R,K,F. rectam EB in Q.N.M. Latus rectum AB in Z,I,H. Parabolas ASD, ELB, in O,S,G; & T, L, P. Dico corpus ortum ex ductu figuræ mixtæ OZIS, in figuram mixtam ZTLI notam habere rationem ad corpus ortum ex ductu figuræ mixtæ SIHG in mixtam figuram ILPH. Dico ſecundò corpus ortum ex Trapezio RZIK ducto in Trapezium ZQNI; ad corpus ortum ex Trapezio KIHF ducto in Trapezium INMH notam etiam habere rationem.

Præparatio.

Deſcribatur Parabola AVLB: cuius ordinatim Applicata AB ad axem ſit eiuſdem etiam latus rectum: hanc porro Parabolam ductæ parallelæ ſecent in V, L, X.

Demonstratio.

Fig.22. Corpus ortum ex figura mixta ZVLI in ſe ducta, æquale eſt corpori orto ex figura mixta OZIS ducta in mixtam figuram ZTLI per Prop.33. Huius. Item corpus ortum ex figura mixta ILXH in ſe, æquale eſt corpori orto ex figura mixta SIHG in figuram mixtam ILPH ducta. Sed corpora ex figuris mixtis ZVLI, ILPH in ſe ductis nota ſunt per Prop.34. Huius tam in continua, quam in diſcreta quantitate, atque adeò eorum inter ſe ratio. Ergo & ratio corporum ortorum ex mixtis illis figuris in mixtas figuras ductis, nota erit. Quod primo loco oſtendi debebat.

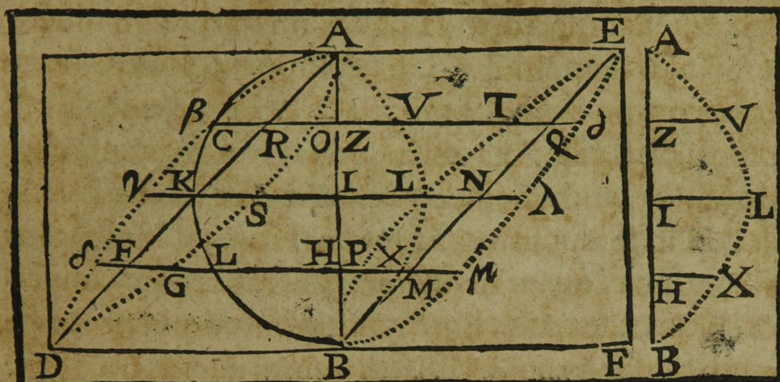
Deinde Prop.39. notum factum eſt. Tum Geometricè tum Atithmeticè, corpus ortum ex Trapezio RZIK ducto in Trapezium ZQNI; & ortum ex Trapezio KIHF ducto in Trapezium INMH. Ergo nota etiam facta eſt ratio; quæ inter corpora illa intercedit. Tota ergo Propoſitio vera eſt.

RROP. XLI. THEOR.

Iiſdem in eadem figura poſitis deſcribantur duæ Parabolæ prioribus æquales: quarum vertices ſint A & B: axis AB. quas lineæ Parallelæ ſuperiori propoſitione deſignatæ (quas hic æquali ſpatio inter ſe diſtare ſuppono) ſi longius producantur, ſecent in β, Γ, Δ; & in Θ, Λ, μ. Dico corpus ortum ex figura mixta βZΓI ducta in figuram mixtam ZΘΛI; notam habere rationem

tionem ad corpus ortum ex figura mixta ΓIHΔ ducta in figuram mixtam IΛμH.

Figura Vigeſimaſecunda.



Demonſtratio.

Hæc propoſitio ipſiſſima eſt 44. lib. 10. à Geometra ex ſuis ipſius principiis probata: ex cuius veritate; ſi euidenter conſtare poteſt, tota ſtabilitur circuli Quadrandi ratio; aut tota corruit: ſi quid vitij pati deprehendatur. Quapropter propoſitionis demonſtrationem eiſdem Authoris verbis, quæ deinceps ſigillatim perpendere neceſſe futurum eſt, huc afferam; mutatis tantùm ſchematis characteribus. Igitur poſtquam confirmauero ex Prop. 40. præcedente huius. Rationem corporis orti ex ductu plani mixti OZIS in planũ mixtum ZTLI; ad corpus ex plano mixto SIHG ducto in planum mixtum ILPH, eſſe notam (hæc, prima ratio, dicenda eſt, vt verbis parcatur) item notam eſſe rationem corporis geniti ex Trapezio RZIK ducto in trapezium INMH. (Quæ ratio ſecunda vocabitur.) Tum cum Geometra cõcludam notam eſſe ratio- *Fig. 22.*

nem tertiam corporis orti ex mixta figura βZIΓ ducta in mixtam figuram ZΘΛI, ad corpus ortum ex mixta figura ΓIHΔ ducta in mixtam figuram IΛMH, hæc eius verba ſunt exceptis characteribus.

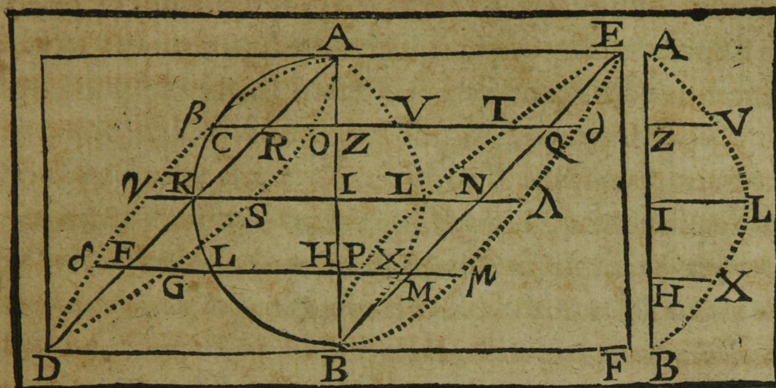
Fig. 22 *Demonſtratum eſt,* inquit *Prop*. 40. *lib*. 10. *rationem corporis orti ex ductu OZIS in ZTLI, ad corpus ortum ex ductu plani SIHG in ILPH; toties continere rationem corporis orti ex ductu plani RZIK in ZQNI, ad corpus ex ductu KIHF in INMH: quoties hæc ratio continet rationem corporis orti ex ductu βZIΓ in ZΘΛI, ad corpus ortum ex ductu plani ΓIHΔ in IΛMH. Igitur cum notæ ſint prima & ſecunda ratio: notum quoque eſt: quoties prima ſecundam contineat: ac propterea notum quoque eſt quoties ſecunda contineat tertiam. Itaque cum ſecunda ratio ſcilicet corporis orti ex ductu plani RZIK in ZQNI ad corpus ortum ex ductu plani KIHF in INMH nota ſit: etiam nota erit Ratio corpois: quod oritur ex ductu ſuperficiei βZIΓ in ZΘΛI ad corpus ortum ex ductu ſuperficiei ΓIHΔ in IΛMH. Quod erat demonſtrandum.* Atque hactenus Geometra. De cuius propoſitione plura recurrent inferius dicenda: ad quæ prius quam venio: Alteram eius propoſitionem eius verbis addo quæ proxime ad Quadraturam influit. Quæ ita habet exceptis characteribus Alphabeticis.

PROP. XLII. THEOR.

Ponantur ſuper AB duo Quadrata ABD, BAE; quibus inſcriptæ ſunt duæ ſemiparabolæ AβΓΔD, βMΛΘE ſitu ſubalterno circa com-

munem

Figura Vigesimasecunda.



munem axem A B. Et ſuper A B diametro, ſemicirculus deſcribatur A K B. Dico corpus quod producit Parabola A Γ D ducta in Parabolam B Λ E æquari ſemicylindro, cuius baſis eſt ſemicirculus A K B. Altitudo A B.

Demonſtrationem huius Propoſitionis dedit libro de ductibus Prop. 143. Hic verò nouam aliam exponit. Prop. 51. ad cuius calcem corollarium affert ex eadem propoſitione profectum: nimirum ſegmenta ſubalterna Parabolica eiſdem parallelis intercepta β Z I Γ, Z Θ Λ I ducta in ſe inuicem, æquale ſolidum producere ſegmento Cylindrico, cuius altitudo eſt A B; baſis verò eſt ſegmentum circulare eiſdem lineis parallelis interceptum, quale eſt ſuperficies mixta C Z I K C. *Fig. 22.*

PROP. XLIII. THEOR.

Iisdem positis quæ superioribus propositionibus. Positis scilicet semiparabolis subalternis AΓD, BΛE circa communem axem AB: circa quem semicirculus describatur. Tum sumptis in axe lineis quibuscunque æqualibus ZI, IH: siue Continuæ sint, vt hic, siue aliquo spatio Discretæ. Ducantur ad axem perpendicu-

Fig. 23. & 22.

Figura Vigesimatertia.

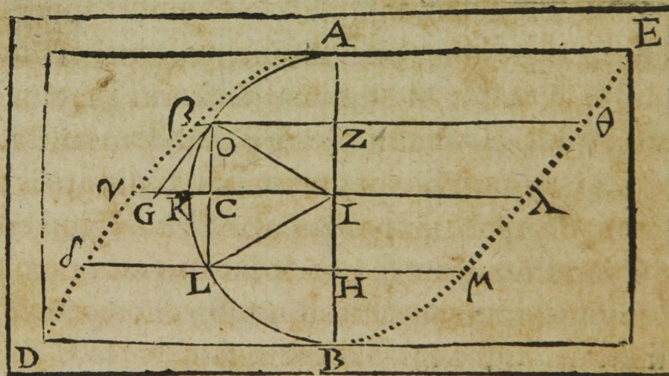
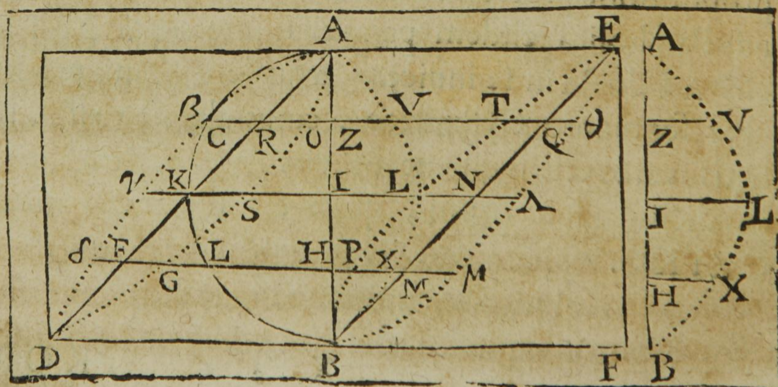


Figura Vigesima secunda.



lares

lares Z, I, H ſecantes Parabolas in B, Γ, Δ, & Θ, Λ, M ſemicirculum verò in C, K, L. Dico ſuperficiem mixtam OZIK, ad mixtam ſuperficiem KIHL, notam habere rationem.

Demonſtratio.

Hæc eſt Geometræ Propoſitio 52. in hoc particulari caſu clariſſima: ſunt enim hæ duæ ſuperficies æquales. Sed hanc vniuerſaliter ſic demonſtrat. Demonſtratum eſt paulò ante, corpori ex ductu plani ZβΓI in ZΘΛI. Æqualem eſſe partem Cylindri ſuper baſi CZIK in altitudine AB. Similiter corpori ex ductu plani ΓIHΔ in IΛMH æquari Cylindri partem cuius baſis eſt KIHL & altitudo AB. Sed demonſtratum eſt Prop. 41. Huius. Corpora quæ illis Cylindricis partibus æquantur, notam habere rationem. Igitur etiam partes Cylindricæ inter ſe notam habent rationem. Sed partes Cylindricæ, cum altitudine non diſcrepent, eandem inter ſe rationem habent quam baſes CZIK; KIHL. Ergo harum etiam nota eſt ratio. Quod fuit probandum. *Fig. 23.* *Fig. 22.*

PROP. XLIV. PROBL.

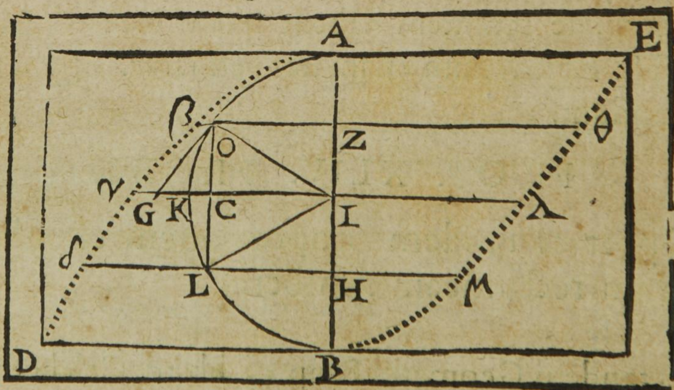
Oporteat tandem proportionem circuli ad figuram rectilineam exhibere.

Ita tandem Geometra Prop. 53. lib. 10. Celeberrimi Problematis ſolutionem proponit & explicat; ad quam aſſequendam conatus omnes illos egregios toto hoc *Fig. 23.*

opere

opere susceptos contulit summo cum Geometriæ incremento. Hæc etiam vnica totius huius exercitatiunculæ meæ, animi gratia susceptæ scopus est vnicus ac finis ab ipso initio propositus. Vt constabit clarius: sed interim Problematis soluendi methodus à summo Geometra allata exponenda est: vt deinde quæ in ea licuit obseruare; planissime, quoad potero, valeam explicare: Quod vt facilius assequar, omissa vniuersali solutione ad quælibet circuli segmenta pertinente ab Authore assumpta; singularem affero, & determinatam: quæ præterquam quod eo nomine euidentior futura sit, cum singularia sint quoad nos semper notiora, & ab ipsis cognitio omnis deducatur. ipsa etiam secundum se, huiusmodi videtur, vix vt vllam reperire sit euidentiorem nullam certe, quam planius subiici posse censeam examini: quod ex dictis hactenus instituere propositum est.

Figura Vigesimatertia.



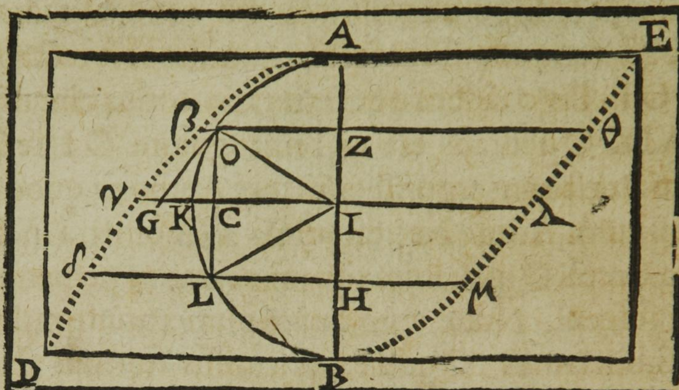
Constructio.

Fig. 23. Sit semicirculus idem qui supra Prop. 42. AKB. Cuius

ius diameter AB in quatuor æquales partes diuidatur in Z, I, H: per quæ puncta ducantur normales, ad AB circulo occurrentes in O, K, L; & ponantur IO, IL, OL. his positis; constat primò arcum OK tertiam esse partem Quadrantis AOK. Diuisa enim est circuli semidiameter bifariam in Z. constat autem semidiametri semissem ZI, sinum esse arcus OK Grad. 30. Constat secundò aream quadrantis AIK minorem esse areâ mixti quadrilateri OK, LHZ. Nam sector AIO æqualis est sectori OIL; eo quod vterque sit duæ tertiæ partes quadrantis circuli. Ablatis ergo æqualibus illis sectoribus: remanet ex Quadrante sector OIK; ex quadrilatero verò supersunt duo triangula OZI, LHI siue rectangulum OI duobus illis triangulis æquale. Dematur adhuc tam ex sectore OIK, quam ex rectangulo OI, triangulum OCI commune: remanebit ex sectore OIK semi-segmentum OKC: & ex rectangulo OI, triangulum OZI siue ei æquale triangulum OCI. Sed triangulum OCI maius est semisegmento OKC, vt statim probabo; ergo etiam tota figura mixta quadrilatera OKLHZ maior est toto circuli Quadrante AID. *Fig. 23.*

Quod autem triangulum OCI maius sit segmento OKC, constat si ducatur linea OG perpendicularis ad OI; quæ circulum tanget in O. Erit enim in triangulo rectangulo IOG demissa OC ad basim IG perpendicularis, media proportionalis inter CI & CG. Sed CI subtendens angulum O trianguli OCI maiorem, maior erit latere OC subtendente angulum I *Fig. 23.*

Figura Vigesimatertia.



minorem; Ergo G C minor etiam eſt quam C O multò ergo minor eſt G C quam C I. Ergo triangulum O C G (cuius pars eſt ſemiſegmentum O K C) minus eſt per 1. lib. 6. quam triangulum O C I. Ergo eodem triangulo K C I multo minus eſt ſemiſegmentũ O K C.

Tertio loco nota eſt ratio areæ Quadrantis A I K
Fig. 23. ad aream mixti Quadrilateri O K L H Z per Prop. 43. Huius. Sunt enim duæ lineæ A I, Z H æquales, inter parallelas Z O, H L; & inter I K & lineam A E, quæ per A ducitur. Quibus poſitis & declaratis ad caſum meum ſingularem neceſſariis; ita demum in eodem caſu Problema iuxta mentem Authoris abſoluam.

Nota eſt ratio Quadrilateri mixti O K L H Z ad
Fig. 23. Quadrantem circuli A I K. Nota eſt præterea ratio eiuſdem quadrantis A I K, ad ſectorem O I L; eſt enim ſector O I L duæ tertiæ Quadrantis A I K. Ergo nota eſt etiam ratio ſectoris O I L ad Quadrilaterum mixtum O K L H Z. Ergo etiam exceſſus, quo Quadrilaterum O K L H Z ſectorem O I L ſuperat notus

erit:

erit: ſcilicet duo triangula O Z I, & L H I ſiue rectangulum O I. Ergo etiam nota erit ratio Quadrantis AIK ad hunc exceſſum rectilineum, hoc eſt rectangulum O I. Ergo tãdem nota erit ratio totius circuli, cuius A I K Quadrans eſt ad rectangulum O I rectilineum. Præſtitum ergo eſt ex mente Authoris, quod erat requiſitum. Atque hæc eſt prima à Geometra noſtro allata circuli Quadratura; quam acuratius perpendendam ſuſcepi. Nunc ergo totam numerorum rationibus ſubiiciamus, Quod ex præmiſſis ſuperiùs, haud erit factu difficile.

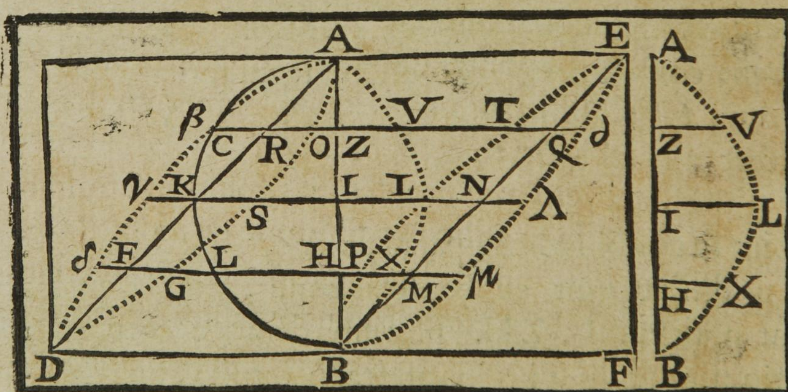
Quia igitur ex eo vno capite, vt patuit, tota pendet *Fig. 23.* hæc circuli Quadratura, vt nota fiat ratio, Quadrantis circuli A I K ad mixtum Quadrilaterum O K L H Z. Hæc autem oſtenſa ſit Prop. 43. eadem cum ratione, quam corpus ortum ex ductu ſegmenti Parabolici AβΓIA in ſegmentum Parabolicum AIΛΘEA habet ad corpus ortum ex ductu figuræ mixtæ ZβΓΔHZ in figuram mixtam ZΘΛμHZ: æquali enim ſpatio binæ lineæ parallelæ AE, ΓΛ & binæ βΘ, Δμ diſſitæ ſunt ex conſtructione, cum æquales ſint poſitæ AI, ZH. Horum denique corporum ratio nota ſit, ſi prius innoteſcat habitudo, quam habent corpora, de quibus Prop. 40. quam hic ſtatim repetam. Ab iis initium ſumere neceſſe eſt numericas rationes; quas circa exemplum ſingulare iuxta methodum in ſuperioribus propoſitionibus allatam nunc inire propoſitum mihi eſt. Quod vt maiori cum ordine; vnde pendet, vt plurimùm, rerum tractandarum

euidentia, instituam; placet seriem propositionum hactenus promotam obseruare: licet de singulari casu nunc agere videar: & potius in praxim reducere, quæ vniuersalius tradita sunt, quam nouum quippiam hic adducere. Sit ergo.

PROP. XLV. PROBL.

Fig.22. Ex figura Propositionis 42. exponatur seorsim Parabola AVLXB: cuius Applicata ad axem sit A B æqualis lateri recto Parabolæ. Sit autem AB diuisa in quatuor partes in Z,I,H, per quæ agantur parallelæ ad A B normales, quæ secent Parabolam in V,L,X.

Figura Vigesimasecunda.



Oporteat ergo numeris exprimere solidam quantitatem tam corporis geniti ex ductu semisegmenti parabolici AVLI in se; quam corporis, quod producit mixta Quadrilatera figura ZVLXH in se ducta: cuius basis ZH, æqualis est basi AI, & vtraque semissis totius A B.

Solutio

Solutio.

Ad priorem partem quod attinet, qua iubetur reperiri ſolidum, quod ſemiſegmentum AVLI in ſe ductum producit. Iam ſolutum eſt Problemate Prop. 36. Huius. Ibi enim inuentum eſt in numeris ſolidum æquale vngulæ ſegmenti Parabolici ALB. Sed hæc vngula integri ſegmenti ALB, eſt æqualis corpori, quod producit ſemiſegmentum ALI in ſe ductum. Conſtat enim corpus huiuſmodi, duabus ſemi-ungulis Parabolicis, vt patet ex doctrina de ductibus à me ſuperiùs, quantum ſatis explicata; quæ ſunt æquales duabus ſemi-ungulis; in quas vngula orta ex ſegmento Parabolico ALB diuidi poteſt, ſi per medium in IL ſecetur eius longitudo. Numerus ergo citata propoſitione repertus eſt. $\frac{2}{15}$. poſita ordinatim Applicata AB partium 2, vel AI partis vnius: quem numerum diligenter annotari oportere ibidem monui. *Fig. 22.*

Secunda verò pars problematis ſoluta etiam habetur Prop. 38. In ea enim propoſitione de induſtria exẽplum attuli: quod huic propoſitioni inſeruiturum prænoſcebam, licet illa vniuerſaliter loquatur. In ea ergo propoſitione corpus exhibui in numeris, quod figura mixta ZVLI in ſe ducta producit; poſita AI partis vnius, & AB partium duarum: vt hic ſupponitur: Sed corpus ortum ex figura mixta hic propoſita ZVLXH in ſe ducta; duplum eſt corporis geniti ex dimidio eiuſdem figuræ (quod dimidium, eſt figura ZVLI) in ſe ducto. Si igitur corpus illic inuentum $\frac{3314}{3840}$

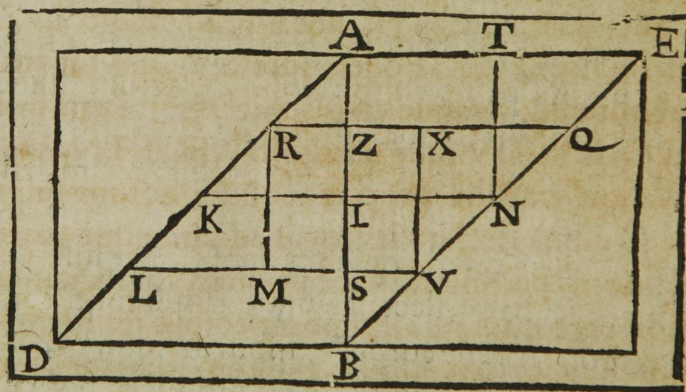
 dupli

duplicetur; vt fiat $\frac{331}{1920}$, exprimet hic numerus soliditatẽ corporis geniti ex mixta figura ZVXLXH in se ducta; vt fieri debuit. Duo ergo numeri hac Prop. inuenti hic seponantur, vnde repeti possint suo tempore. Prior est $\frac{2}{15}$ posterior $\frac{331}{1920}$.

PROP. XLVI. PROBL.

Fig. 24. Ex eadem Propositionis 42. expediatur figura parallelogramma siue Rhomboides. AEBD: cuius diameter AB in quatuor partes æquales diuidatur in punctis Z, I, S: per quæ ducantur lineæ ad AB perpendiculares, secantes latus AD in R, K L, & EB latus in Q, N, V.

Figura Vigesimaquarta.



Oporteat ergo numeris exprimere solidam *Fig. 24.* quantitatem tam corporis geniti ex ductu trianguli AIK in Trapezium AINE: quam corporis geniti ex ductu Trapezij RZSL in Trapezium ZSVQ. Posita tota AB, partium

tium 2. vel eius semisse AI, aut ZS, 1. vt prius.

Solutio.

A punctis R, N, V; ducantur lineæ ad AB, parallelæ RM, NT, VX. Erit AE diuisa in T in duas partes æquales: eo quod AT æqualis sit oppositæ lineæ IN in rectangulo AN: sit autem ipsa IN, semissis lineæ KN, id est AE. Similiter RQ. in X; & LV in M, bifariam diuiduntur. Rursus RX iterum bifariam diuiditur in Z, & MV in S, nam in triangulo rectangulo AZR, duo anguli A & R sunt semirecti, atque adeo æquales. Ergo & latera ZA, ZR per 6. lib. 1. sunt æqualia; sed ex hypothesi ZA est semissis lineæ AI, quæ æqualis est lineæ RX. Ergo & ZR semissis est lineæ RX. Eodem iure SV, SM æquales probabuntur; & vtraque erit vt patet; quarta pars linearum RQ, LV. Denique triangula AIK, ETN, RML, QXV sunt æqualia propter æqualia eorum singula latera. Quibus declaratis, quæ ad vtramque partem propositionis pertinent. Nunc priorem aggrediamur. *Fig. 24.*

Prior ergo pars qua inquiritur corpus ex triangulo AIK in Trapezium AINE genitum soluetur, si primo triangulum AIK ducatur in triangulum ETN subalterne positum: ex eo verò ductu generatur corpus; quod per Prop. 20. Corol. 2. Huius. est sexta pars parallelepipedi cuius basis est rectangulum sub lateribus IK, TE triangulorum: & altitudo est latus AI vel TN commune, vnde ductus incipit: Quo fit in hoc *Fig. 24.*

casu,

Figura Vigeſimaquarta.

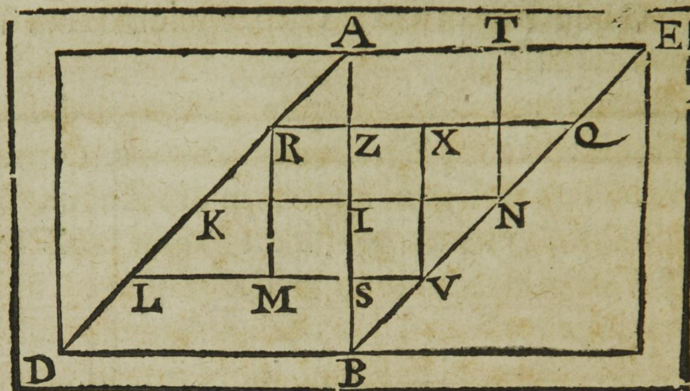
caſu, in quo duo baſis latera T E, I K ſunt æqualia; Fig. 24. iiſque etiam altitudo A I vel T N eſt æqualis, vt parallelepipedum ſit cubus. Cum ergo A I, & T N; ſicut & I K, T E ſint vnitas ex hypotheſi. Si ducatur 1. in 1. producetur baſis cubi Quadrata 1. Si rurſus in hanc baſim 1 ducatur altitudo 1: fiet cubus 1, ex ductu huiuſmodi, cuius ſexta pars $\frac{1}{6}$, eſt ſoliditas corporis ex triangulo AIK ducto in ſubalternum triangulum NTE geniti per Prop. 20. Corol. 2. Deinde duci debet idem triangulum AIK in Quadratum AINT. Ex eo verò ductu naſcitur priſma triangulare vt Prop. 13. explicatum eſt. quod eſt dimidium cubi, vt patet, cuius baſis eſt Quadratum A N & altitudo I K. Sed cubus eſt 1. vt paulo ante oſtenſum eſt, ergo priſma, quod eſt huius cubi ſemiſſis eſt $\frac{1}{2}$. Iungantur hæc duo ſolida $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$ genita ex ductu trianguli A I K in triangulum E T N & in Quadratum A N (ſic enim in totum Trapezium AENI, ducitur triangulum A I K) fiet ſolidum $\frac{4}{6}$,

ſiue

ſiue [illegible]. Quod priore huius Propoſitionis parte quæritur. Quod ſcilicet oritur ex triangulo AIK in Trapezium AINE.

Poſterior propoſitionis pars abſoluitur ducendo ſingulas Trapezij R Z S L partes, nimirum triangulum R M L, & rectangulum R S; in duas ſingulas Trapezij Z Q V S; partes: quæ ſunt rectangulum Z V, & triangulum X V Q. vt Prop. 39. declaratum eſt. Primò ergo triangulum R M L. ductum in triangulum X V Q corpus ſolidum producit idem, quod iam ante productum fuit in priori parte ex ductu trianguli A I K in triangulum T N E nempe $\frac{1}{4}$. Idem verò triangulum RML ductum in rectangulum ZV generat priſma triangulare, æquale parallelepipedo: cuius baſis eſt rectangulum Z V; & altitudo eſt ſemiſſis lateris M L, trianguli M R L. Sed ſemiſſis lateris M L quod æquale eſt oſtenſum lineæ Z S, eſt Z I, vel I S quæ eſt $\frac{1}{2}$: cum tota Z S ſit ex hypotheſi 1. Si igitur Z I $\frac{1}{2}$ multiplicetur in rectangulum Z V (cuius area habetur ducta Z X $\frac{1}{2}$ in Z S, 1, & eſt $\frac{1}{2}$) fiet parallelepipedum $\frac{1}{4}$, æquale priſmati triangulari ſupradicto. Altera verò pars eiuſdem Trapezij R Z S L, nempe rectangulum R S ductum in triangulum X Q V: idem ſolidum $\frac{1}{4}$ producere debet. Cum rectangulum R S æquale ſit rectangulo Z V. & triangulum XQV triangulo RML. Denique duci debet rectangulum R S in rectangulum ZV; & producetur parallelepipedum, cuius baſis eſt rectangulum ZV. $\frac{1}{4}$, & altitudo R Z $\frac{1}{2}$. Fig. 24

Figura Vicesimaquarta.



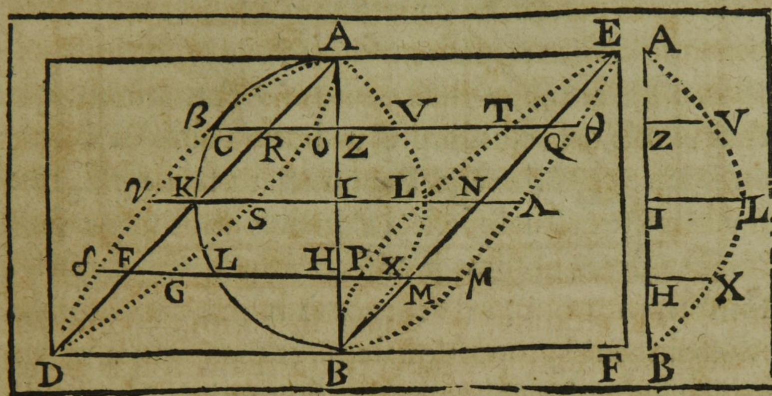
Ergo hæc altitudo $\frac{1}{2}$ ducta in basim $\frac{1}{2}$ producit
Fig.24. parallelepipedum $\frac{1}{4}$. Ita vt tria æqualia solida generentur, nempe ex ductu trianguli R M L in rectangulum ZV; ex ductu rectanguli R S in triangulum XQV & denique ex ductu rectanguli R S in rectangulum Z V; semper enim generatur solidum $\frac{1}{4}$. Tria ergo illa solida siue corpora simul addita efficient solidum $\frac{3}{4}$: cui adhuc addi debet solidum factum ex triangulo RML ducto in triangulum subalterne positum VXQ. Quod solidum est inuentum $\frac{1}{6}$. Ergo facta additione habebitur solidum $\frac{11}{12}$ productum ex Trapezio RZSL in Trapezium Z Q V S. Quod quærebatur. Hic ergo numerus $\frac{11}{12}$ post assumendus etiam annotetur.

PROP. XLVII. PROBL.

Fig.22. In figura Propositionis 42. oporteat Rationem determinare in numeris, quam habet corpus ortum ex superficie mixta A ß Γ I ducta in mixtam superficiem A I λ Θ E subalterne positam

tam, ad corpus ortum ex mixta ſuperficie ZβΓΔH ducta in mixtam ſuperficiem ZHμΛΘ.

Figura Vigeſimaſecunda.



EXPOSITIO.

Cum ex Prop. 41. ſuperiore, quæ apud Geometram eſt 44. lib. 10. conſtet iuxta eius Principia rationem corporis orti ex mixta figura AVLI in ſe ductâ, ad corpus ortum ex mixta figura ZVLXH ducta in ſe; toties continere rationem corporis orti ex triangulo AIK ducto in Trapezium AINE ad corpus ortum ex Trapezio ZHFR ducto in Trapezium ZHMQ: quoties hæc ipſa ratio continet rationem corporis orti ex ſuperficie mixta AβΓI ducta in mixtam ſuperficiem AIΛΘE; ad corpus ortum ex mixta ſuperficie ZβΓΔH ducta in mixtam ſuperficiem ZΘΛμH. Sint autem termini primæ & ſecundæ rationis noti per Prop. 45. & 46. atque adeo notæ ipſæ rationes prima & ſecunda: notum quoque erit, inquit Author citata Prop. 44. lib. 10. quoties prima contineat ſecundam: *Fig. 22.*

que adeo notum etiam erit quoties ſecunda contineat tertiam, ac proinde nota etiam euadet ipſa ratio tertia.

Hic non parum me hærere contigit, mi Lector, nec potui non dolere tarditatem meam & nimiæ ſanè breuitatis non accuſare doctiſſimum Geometram, qui caput, vnde tota eius hæc Quadratura abſolui debet, tam leuiter perſtrinxerit. Pronunciatu facile eſt, nec primâ fronte factu difficile, ex duabus notis rationibus tertiam efficere notam. Cenſeret non nemo eam eſſe Authoris mentem, vt velit duabus notis rationibus tertiam inueniri proportionalem, atque ita notam fieri nec ab eius verbis abhorret hæc ſententia. Ait enim, *cum notæ ſint prima & ſecunda ratio; notum quoque eſt quoties prima contineat ſecundam, ac propterea notum quoque quoties ſecunda contineat tertiam, itaque cum ſecunda nota ſit: nota etiam erit.* quid magis huic ſententiæ concinere poteſt? Quod ſi nihilominus dubites an per hæc verba. *notum eſt quoties prima ratio contineat ſecundam: ergo & notum quoties ſecunda contineat tertiam,* intelligat eas eſſe proportionales velítque primam ita ſe habere ad ſecundam vt hæc ſe habet ad tertiam: dubium tollet Propoſitio 125. libri de Proport. vbi docens modum diuidendi rationem per aliam, ait. *Oporteat rationem per aliam partiri, ſiuè oſtendere quoties vna alteram contineat.* Quæ verba aliud non ſonant quam, oſtendere quam habitudinem habeat vna ratio ad alteram: & in Corollario eiuſdem Propoſitionis ſic loquitur. *Hinc manifeſtum eſt diuiſionem vnius rationis per alteram*

ram coincidere cum assignatione illius rationis quam continent inter se duæ rationes inuicem diuidendæ. Ex quibus liquido constat Authorem nihil aliud velle significare hoc loquendi modo, *vna ratio alteram continet*, vel, *toties continet*, quam vnam rationem ita, vel ita se habere ad alteram. Denique cum nullus alius Geometris notus sit modus tertiam quantitatem ignotam inuestigandi ex duabus notis quantitatibus proportionalibus; quam tertiam proportionalem duabus notis adiungendo: Si alio aliquo ipsi soli comperto modo tertiam illam rationem ignotam ex duabus notis & quidem talem quæ non foret illis tertia proportionalis, inueniri debere intelligeret: nunquid illum, etiam cum absoluto Quadraturæ, quam stabilire & tradere conatur, damno reticuisset? Hæc momentum grauissimum habere mihi videbantur ad suadendum factum fore satis allatæ Propositioni: si duabus datis rationibus primæ & secundæ tertiam proportionalem assignassem. Verùm non leuioris ponderis rationes occurrebant; quibus adducebar vt crederem aliud aliquid Authorem exigere ad tertiam illam rationem determinandam ex duabus datis; quam inuestigationem rationis tertiæ duabus datis proportionalis. Nam

Primò quidem nullibi cernere est Geometram per totam eius ratiocinationem, quæ ab initio lib. 10. ad Propositionem 44. continetur, vel proposuisse vel probasse has tres rationes solidorum (quæ initio huius expositionis appellaui) Proportionales esse, nec eius

Proportionis mentionem vllam fecisse; sed semper aliam quandam rationum mutuam continentiam attendisse & significare voluisse. Nullo ergo modo nunc, nullo assertionis prius iacto fundamento, censendus est asserere tertiam illam rationem ignotam, debere inuestigari ex duabus notis rationibus iuxta solemnem in Geometricis modum, quo ignotæ quantitates ex datarum rationibus notis colliguntur.

Secundò non obscurè videtur colligi ex toto eius discursu, qui hac Prop.44. tandem concluditur; ita debere accipi hanc rationum continentiam, vt prima ratio secundam toties contineat per multiplicationem; quoties secunda per multiplicationem continet tertiam: atque ita posse in hoc sensu tertiam illam ex duabus prioribus datis innotescere: qui sensus à priore diuersissimus est, vt Prop.24. lib.1. exposui, tertiámque illam rationem à priore longè diuersam, si in eo sensu quæratur, oblaturus est.

In hac tanta difficultate, ex qua Quadraturæ huius sors tota pendet, è re maximè futurum censeo ad ipsius Authoris oracula adire; &, si fieri possit, ex eius ore genuinum sensum huius continentiæ rationum excipere. Hunc ego tribus omnino propositionibus capi arbitror: in quarum expositione elucet eruditi viri reuerendi Patris Alfonsi de Sarasa, opera accurata eò pluris facienda; quod ea ipsa, quæ in confirmatione Quadraturæ edidit; ab ipsius Authoris ore excepisse potuit. Earum Propositionum prima est octaua lib.10. secunda est 12. tertia verò 40.

In prima harum trium Propoſitionum, quam exponit P. de Saraſa Cor.7. in Confirmationibus Quadraturæ. oſtenditur. Quod ſi rationis E ad F tam Antecedens E in duas partes A & B; quam Conſequens F in duas C & D diuidatur: Rationem E ad F eandem eſſe cum Ratione A ad C; item A ad D, & B D. Nam ratio A ad C, & B ad C, propter eundem Conſequentem C, ſunt vt A & B ſimul ad C. hoc eſt, vt E ad C. Eodem modo, ratio A ad D & ratio B ad D erunt vt A & B ſimul, hoc eſt E ad D: Et Inuertendo terminos. Rationes C ad A, & C, ad B, erunt vt C ad E; ſimiliter rationes D ad A & D ad B, erunt vt D ad E. Sed rationes C ad E & D ad E propter eundem Conſequentem E ſunt vt C & D ſimul, hoc eſt, F ad E. Ergo ita eſt F ad E vt C ad A & C ad B; & ſimul D ad A & D ad B. Vel contrà; ita eſt E ad F, vt A ad C, & A ad D; & vt B ad C & B ad D. Cum verò huiuſmodi rationes colliguntur, ſatis patet non fieri additionem rationum: ſed tantum quantitatum quæ ex parte rationes augent, ex parte minuunt: tunc ſcilicet cum inuariato Antecedente E adduntur duo Conſequentes C & D vt fiat F: habet enim E ad F minorem rationem quam habeat ad C, quia iſte Conſequens C auctus eſt Accedente Conſequente D dum inuariatus perſeuerat Antecedens F. Quod diligenter obſeruandum monet Author & meritò in ſcholio citatæ Prop.8.

	E 20	
A 12		B 8
C 6		D 2
	F 8	

In

In altera Propositione, quæ est lib. 10. duodecima sic Author loquitur. Si sint quatuor ordines quinque proportionalium quantitatum A B C D E, &c. habentes vltimas quantitates E, K, P, V, æquales. Dico Rationem quantitatum A F ad L Q toties continere rationem quantitatum C H ad N S; quoties ratio quantitatum C H ad N S continet rationem quantitatum D I ad O T. hoc ita demonstrat. Ratio quan-

A 16	B 8	C 4	D 2	E 1
F 81	G 27	H 9	I 3	K 1
L 256	M 64	N 16	O 4	P 1
Q 625	R 125	S 25	T 5	V 1

titatum A & F simul, ad quantitates L, Q simul æquatur rationi, A L, A Q, & F L, F Q. Similiter ratio quantitatum C H ad N S æquatur rationi C N, C S; & H N, H S. Pariter etiam ratio quantitatum D & I simul ad O T æquatur rationi D O, D T; & I O, I T per Propos. 8. proximè demonstratam. Ergo per eandem Prop. Quoties Rationes A L, A Q; F L, F Q continent rationes C N, C S; H N, H S: & quoties hæ continent rationes D O, D T : I O, I T: toties continet etiam ratio A F ad L Q, rationem C H ad N S; & hæc ipsa rationem D I ad O T.

Sed ratio A L per 27. progr. continet per multiplicationem bis C N. Et ratio C N per multiplicationem continet bis rationem D O. Ratio quoque A Q continet bis rationem C S: & hæc bis rationem D T: atque

ita

ita dereliquis. Igitur quoties ratio quantitatum A F ad L Q continet rationem quantitatum C H ad N S: toties hæc ipſa ratio C H ad N S continet rationem quantitatum D I ad O T. Quod fuit demonſtrandum. Hæc Geometra totidem omnino verbis: ex quibus non obſcurè colligimus, quo ſenſu velit in ſequentibus vnam rationem toties vel toties aliam continere: quod ad ſolutionem Propoſitionis meæ ex eius mente inſtituendam neceſſarium eſt noſſe.

Perpendamus paulò accuratius allatam ab eo ratiocinationem. Ratio prima totalis (hic omiſſis characteribus rationes eodem ſeruato ordine ſuperiore indico breuius) eadem eſt cum duabus partialibus rationibus primis per Prop.8. paulò ante allatam. Idem dic de ſecunda & tertia totali ratione, & rationibus partialibus ſecundis & tertiis. Ergo (pergit Author) quoties primæ rationes partiales continent ſecundas; & ſecundæ, tertias: toties etiam prima ratio totalis continebit ſecundam totalem, & hæc ſecunda tertiam totalem. Sed, ait idem, primæ partiales rationes continent bis per multiplicationem rationes partiales ſecundas; & hæ partiales ſecundæ, bis tertias per multiplicationem: Ergo (quænam ex his præmiſſis inferatur alia concluſio?) Ergo, inquam, prima ratio totalis continet bis per multiplicationem ſecundam: & ſecunda hæc bis per multiplicationem continet tertiam; ſiue prima eſt duplicata ſecundæ, & ſecunda eſt duplicata tertiæ. Licet verò Geometra concluſerit tantùm in hæc verba: Ergo prima ratio totalis toties continet ſecundam;

quoties ſecunda continet tertiam, nec vllam mentionem illius duplicationis fecerit; eam tamen duplicationem his rationibus conuenire nec debuit nec potuit non aſſerere. Præmiſſæ enim ab eo allatæ, eam vnam concluſionem inferunt, nec aliam inferre poſſunt. Quod ipſi adeò clarum viſum eſt, vt inanem cenſuerit illius multiplicationis mentionem facere in concluſione; cum non aliter continentia rationum illarum in concluſione accipi poſſit, quam accipiatur in præmiſſis; & verò quid opus mentione multiplicationis in partialibus, ſi in totalibus nulla illius habeatur ratio. Vnde etiam fit; cum concluſio eadem ſit ipſa Propoſitio probanda; vt Propoſitio in hoc etiam ſenſu multiplicationis accipienda ſit, licet illius nulla mentio in ea fiat; dum tantùm aſſerit rationem totalem primam, toties continere ſecundam; quoties ratio totalis ſecunda continet tertiam: cuius quidem multiplicationis mentionem ſi ipſi Propoſitioni, quando iuxta eam probanda erat, appoſuiſſet: longe conſultius feciſſe; lõge certe diſtinctius propoſuiſſe videretur.

Tandem ergo euidenter aſſecutus videor ſenſum, & euidentius adhuc me aſſecutum conſtabit inferiùs; quo doctiſſimus Geometra Prop. 44. tertiam rationem inquirit ſolidorum duorum ex notis duabus rationibus aliorum quatuor ſolidorum: quóve ego ſenſu eandem tertiam rationem in numeris exhibere nunc debeam iuxta Propoſitionem à me adductam ſuperiùs. An autem vera ſit vel falſa hæc Authoris Propoſitio 12. non eſt huius loci expendere: iuris eſt illa quæſtio:

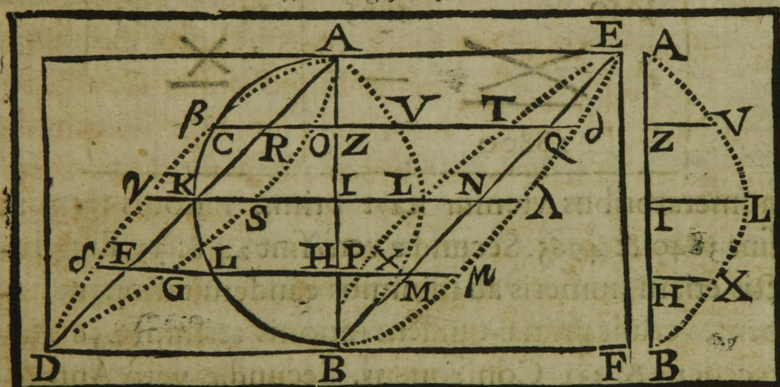
factum

factum probatum eſt, ex quo ſolutionem Problematis mei inſtituere debeo. Erit cum Propoſitio illa perpendetur.

SOLVTIO PROP. XLVII.

Quærimus ergo Rationem quam habet corpus ortum ex ſuperficie mixta A β Γ I ducta in mixtam ſuperficiem A I λ Θ E; ad corpus ortum ex ſuperficie mixta Z β Δ H ducta in mixtam ſuperficiem Z H μ Θ. Eam autem quærimus ex data prima ratione, quam *Fig. 22.*

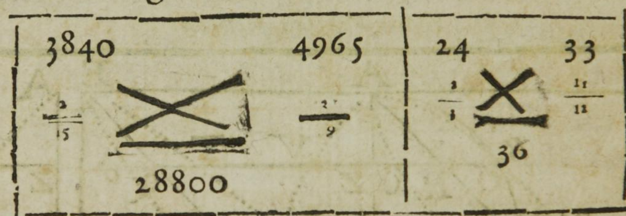
Figura Vigeſimaſecunda.



habet corpus ortum ex plano A V L I in ſe ducto, ad corpus ortum ex plano Z V X H: & ex ſecunda Ratione quæ intercedit inter corpus ortum ex triangulo A I K ducto in Trapezium A I N E, & corpus ortum ex Trapezio Z H F R ducto in Trapezium Z H M Q, quæ item data eſt. Inuenta autem fuerit tertia illa ratio ſi duabus notis rationibus primæ & ſecundæ, ratio adiungatur tertia, quæ huiuſmodi ſit, vt prima bis per multiplicationem ſecundam contineat: ſecunda verò

etiam bis per multiplicationem contineat illam tertiam vt fusè paulo ante exposui.

Cum igitur primæ Rationis termini Prop. 45. inuenti sint hi $\frac{2}{15}$ & $\frac{331}{1920}$ secundæ verò Rationis termini Prop. 46. definiti fuerint huiusmodi $\frac{2}{3}$ & $\frac{11}{12}$. Reducamus primo loco terminos illos omnes, qui fracti sunt, ad numeros integros, futuris operationibus aptiores. Reductionis formulam adscribo: vt cuique pateat vnde ortum habeant numeri, quibus vtendum erit. Omissis ergo fractorum denominatoribus, solis



numeratoribus vtemur itavt primæ rationis termini sint 3840 & 4965. Secundæ verò sint 24 & 33. Et reductis etiam numeris ad minimos eandem rationem habentes erunt primæ quidem rationis termini 256 Antecedens & 331 Consequens. Secundæ verò Antecedens 8, & 11 Consequens.

Nunc demum vtraque hæc Ratio ad eundem Consequentem reducatur per Prop. 9. lib. 1. vt hoc in schemate exprimitur. Erit primæ rationis Antecedēs A 2816 & Consequens C 3641. Rationis vero secūdæ Antecedens est B 2648, & Cōsequens iterū C 3641. Quia verò per Prop. 7. lib. 1. Rationes, quarū idem est Cōsequens, eandem habent proportionem, quam earumdem Antecedentes; vt reperiatur tertia illa ratio, quam inuestigamus,

ſtigamus, ei iam attributo eodem cum reliquis Conſequente C 3641 congruentem Antecedentem inquiremus hoc modo.

A 2816		B 2648
256	✕	8
331	—	11
	C 3641	

Inter duos Antecedentes A 2816, & B 2648 datarum rationum primæ & ſecundæ reperiatur medius proportionalis numerus D 2730 nonnihil minor verò (maior verò foret 2731, vterlibet adhibeatur, nihil ad inſtitutum conſequetur incommodi.) Deinde duobus numeris D & B tertius reperiatur proportionalis F 2568 (qui erit paulò maior

A 2816	D 2730	B 2648	E 2607	F 2568

verò, ſed nihil intereſt) denique inter B & F medius proportionalis reperiatur E 2607 minor verò, quod ſufficit. Dico hunc numerum E eum eſſe qui quæritur, eum ſcilicet; cui velut Antecedenti ſi adiungatur Conſequens C 3641, tertiam rationem quæſitam exhibebit: cuius, ratio ſecunda B ad C eſt duplicata; quemadmodum rationis B ad C ſecundæ eſt duplicata ratio prima A ad C.

Demonſtratio.

A 2816.	D 2730.	B 2648.	E 2607.	F 2568.
C 3641.	C 3641.	C 3641.	C 3641.	C 3641.

Quia igitur ex conſtructione tres Antecedentes A, D, B ſunt continue proportionales. Ratio A ad B

 duplicata

duplicata erit rationis D ad B. Sed vt D ad B, ita eſt ex conſtructione B ad F. Ergo ratio A ad B eſt duplicata rationis B ad F. Sed quia ex eadem conſtructione tres B, E, F ſunt etiam continuè proportionales, erit etiam ratio B ad F duplicata rationis E ad F, ſiue B ad E. Quare cum rationes A, C, B C, E C, quarum idem eſt Conſequens C, ita ſa habeant per 7. lib. 1. vt ſe habent Antecedentes A, B, E: erit prima ratio A C duplicata rationis B C ſecundæ; & ſecunda B C duplicata tertiæ E C. Duabus igitur datis rationibus primâ A C, & ſecundâ B C, tertiam inuenimus E C. quam toties contineat per multiplicationem ratio ſecunda B C iuxta mentem Authoris: quoties per multiplicationem ipſam BC ſecundam continet prima ratio A C quod querebatur.

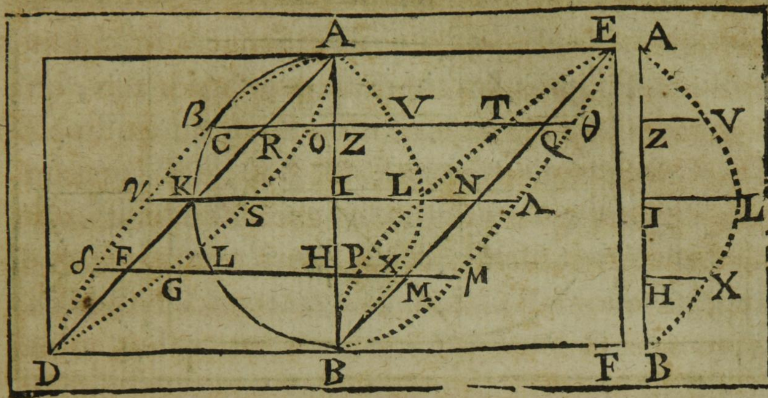
PROP. XLVIII. THEOR.

Non videtur abſoluta Circuli Quadratura.

EXPOSITIO.

Fig. 22. Vt huius ſententiæ æquitas euidentiùs conſtet: iuuerit hic obiter recolere quæ iam in ſuperioribus aliquoties propoſita ſunt. Nimirum corpus ortum ex plano AVLI in ſe ducto, ad corpus ortum ex plano ZVLXH in ſe ducto, talem habere rationem; quæ bis per multiplicationem contineat rationem corporis orti ex triangulo AIK ducto in Trapezium AINE ad corpus ortum ex Trapezio ZHFR ducto in Trapezium ZHMQ: ſicut hæc ipſa ratio bis per multiplicationem

Figura Vigesimasecunda.



plicationem continet rationem corporis orti ex plano Α β Γ Ι ducto in planum Α Ι Λ Ε, ad corpus ortum ex plano Ζ β Δ Η ducto in planum Ζ Η μ Θ: id enim stabilitum est iuxta Authoris mentem Prop.47 præcedente. Rursus ostensum est Prop.42. superiore. Corpus ortum ex plano Α β Γ Ι ducto in planum ΑΙΛΕ æquale esse cylindraceo, cuius basis est circuli Quadrans A I K: corpus verò ortum ex plano Ζ Η Δ β ducto in planum Ζ Η μ Θ, æquale esse cylindraceo; cuius basis est mixtum quadrilaterum Z H L C. altitudo verò vtriusque huius cylindracei est recta A B. quo fit vt duo illa Cylindracea eandem habeant inter se rationem, quam habent inter se circuli Quadrans A I K & planum mixtum Z H L C. Ita vt ratio tertia, Propositione præcedente inuenta, ad cylindracea illa duo spectans eadem ipsa sit ratio inter circuli Quadrantem A I K & planum mixtum Z H L C. His declaratis. *Fig.22*

Demon

Figura Vigesimasecunda.

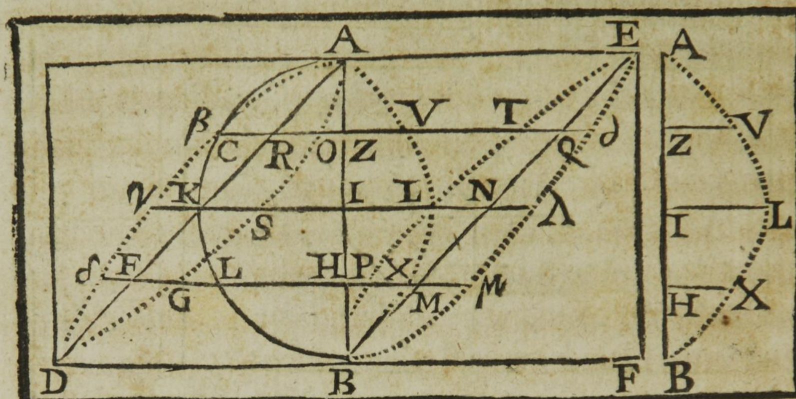
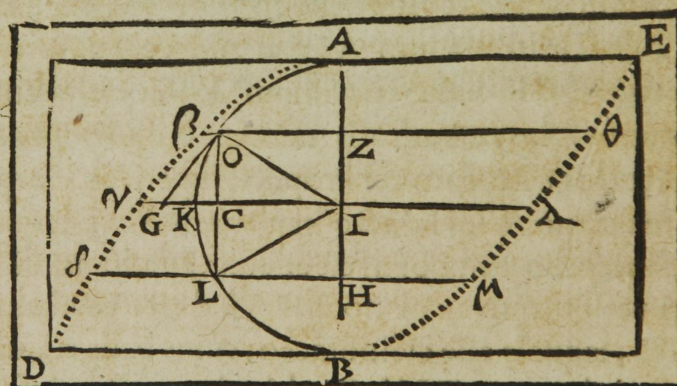


Figura Vigesimatertia.



Demonstratio.

Fig. 22. & 23. Cum termini tertiæ illius Rationis sint 2607 & 3641. ille Antecedenti, hic Consequens: ita erit Quadrans circuli A I K ad Quadrilaterum mixtum Z L; vt 2607 ad 3641. In altera figura ducantur à centro I circuli radij I L, I O ad puncta in quibus circulus secatur à parallelis Zβ, H Δ, & iungatur O L. Erit sector I O K L æqualis sectori I A Θ, qui continet duas tertias

tias

tias partes totius Quadrantis AIK Ergo & ſector I O L erit duæ tertiæ partes eiuſdem Quadrantis. Præterea duo triangula I Z O, I H L erunt exceſſus Quadrilateri mixti Z L, ſupra duas tertias Quadrantis AIK: ſunt autem, vt patet, duo illa triangula ſimul æqualia triangulo O I L. Iam ſic ratiocinationem totam colligo. Vt ſe habet Quadrans AIK ad duas ſui tertias partes ita numerus 2607 ad numerum 1738. duas tertias ſui partes continentem: deinde vt ſector I O L ſiue duæ tertiæ Quadrantis ad triangulum O I L ſiue exceſſum quo mixtum quadrilaterum Z L ſuperat ſectorem I O L; ita erit numerus 1738 ad numerum 1903. qui eſt exceſſus numeri 3641 ſupra numerum 1738 continentem duas tertias Antecedentis 2607. Sed numeus 1738 eſt longè minor quàm 1903 (hoc nimirum numero 165) ergo ſector I O L longè minor eſt triangulo O I L totum parte, quod eſt abſurdum. Quod non niſi ob defectum in Antecedentibus admiſſum, contingere poteſt. Ergo non videtur abſoluta circuli Quadratura. Quod erat probandum. Fig. 23.

Scholium.

Reieci ſuprà, nec immeritò ob allatas rationes, ſenſum illum; quo vna ratio alteram continere dici poteſt ſimpliciter & abſolutè; nec in eo accipi ab Authore hac in materia vel potuiſſe vel debuiſſe. Ne quid tamen ſcrupuli reſideat; & firmius ſtabiliatur, quod de ſenſu continentiæ rationum per multiplicationem aſſerui: Propoſitionem præcedentem etiam in ſenſu illo ſimplici & abſoluto continentiæ rationum

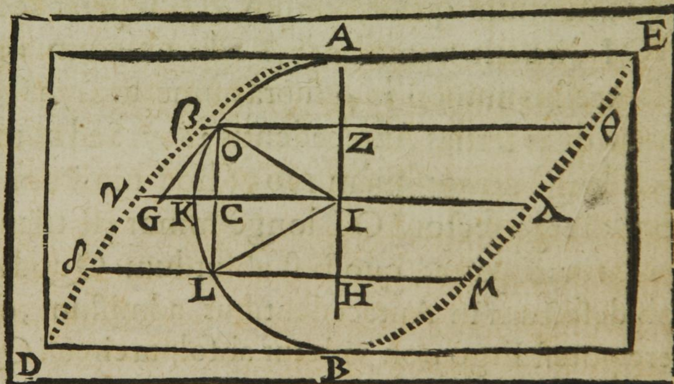
 lubet

lubet perpendere. Sic enim in omni ſenſu Cyclometræ ratiocinatio nutare deprehendetur.

Reſumantur igitur ex Propoſitione 47. Rationes duæ his terminis expreſſæ, 256 Antecedentis ad Conſequentē 331, & 8 ad 11. Quibus ratio tertia proportionalis reperiatur in ſenſu abſoluto per Prop. 26. lib. 1. cuiuſmodi eſt ratio Antecedentis 331, ad Conſequentem 484. his terminis aſſumptis, eandem ratiocinationem, eiſdem verbis; eâdemque figurâ inſtituemus, iu hunc modum.

Figura Vigeſimatertia.

Fig. 23.



Ita ſe habet, vt vult Author, Quadrans circuli AIK, ad Quadrilaterum mixtum OZHLKO, vt 331 ad 484. Ergo vt Quadrans AIK ad duas ſui tertias partes, hoc eſt, ad ſectorem OIL: ita eſt numerus 331 ad numerum $220\frac{2}{3}$ duas tertias partes illius continentem. Deinde vt ſector IOL ad triangulum OIL: ita numerus $220\frac{2}{3}$ ad numerum $263\frac{1}{3}$; qui eſt exceſſus numeri 484 ſupra numerum $220\frac{2}{3}$ continentem duas tertias Antecedentis 331. Sed numerus $220\frac{2}{3}$ eſt longè minor numero $263\frac{1}{3}$ (numero ſcilicet $42\frac{2}{3}$) Ergo ſector IOL minor eſt triangulo OIL.

OIL. Quod est absurdum. Quare sensus hic continentiæ illarum rationum simplex & absolutus, nullo modo admittendus est.

Scholium Secundum.

Si propter rationes allatas minùs admittenda videatur hæc Circuli Quadratura nec Quadratura Hyperbolæ, quam ad calcem huius Libri Author exponit, admitti debet: ex ijsdem scilicet fontibus deducitur; quos iterum euoluere haud fuerit operæpretium.

RROP. XLIX. THEOR.

Totus huius Quadraturæ defectus ex vnica Propositione duodecima lib. 10. profluxit.

Demonstratio.

Ne præstantissimo operi Geometrico, cui parturiendo sæcula non viderentur sufficere, nota inuratur Prop. 48. præcedente, quam par sit, grauior: dum plures eius Propositiones earúmque probationes in suspicionem vocarentur: nouerit Lector à me Propositionem vnicam ex bis mille (vix enim pauciores hoc opus complectitur, quas non minori attentione quam voluptate perlegi) in dubiũ vocari: ea est citata duodecima lib. 10. ex cuius periculo, trigesimanona & quadragesima quæ ex ea pendent; in discrimen adducuntur: nec ab eo sese deinde tueri potest Propositio 44. quæ tota quadragesimæ innititur.

Adduxi suprà Prop. 47. in expositione, paragrapho. *In altera Propositione, &c.* citatam illam Propositio-

nem 12. iuxta Authoris verba: & euidentissimè demonstraui, ex eius syllogysmo, seruata syllogismi forma, quam à viro doctissimo seruari dubium non est; eius verborum sensum; iuxta quem deinde Quadraturæ solutio colligitur Prop. 44. Demonstraui scilicet si dentur quatuor ordines quinque quantitatum continue proportionalium, quarum vltimæ sint æquales, vt hic habentur iterum, velle Authorem, si binæ duorum

A 16	B 8	C 4	D 2	E 1
F 81	G 27	H 9	I 3	K 1
L 256	M 64	N 16	O 4	P 1
Q 625	R 125	S 25	T 5	V 1

priorum ordinum & binæ respondentes posteriorum iungantur; Rationem duarum primarum quantitatum A & F simul, ad duas simul L & Q, continere bis per multiplicationem, rationem tertiarum quantitatum C & H simul, ad duas quantitates N & S simul. Et hanc ipsam rationem C & H simul, ad N & S simul, continere etiam bis per multiplicationem rationem quantitatum quartarum D & I simul, ad quantitates O & T simul. Atque hæc erat facti quæstio tam clarè soluta, quam quæ clarissimè solui potest.

At verò si de iure quæratur; si, verane hæc Propositio an falsa sit, ex legibus Geometricis perpendatur: negari sanè non potest, quin in eam irrepserit aliquid falsitatis, quæ in decretoriam Quadraturæ solutionem median

mediantibus Propoſitionibus 39.& 40, propagata mancam & imperfectam, vno verbo, nullam reddiderit. Cuius probationem non aliunde longiùs petam quàm à Quadruplici illo ordine ſuperiore quantitatum proportionalium. Iunge binos & binos terminos tam duorum priorum ordinum, quam duorum poſteriorum & ita, vt hic habetur, compone: tum attende quam

A		B		C		D		E		
	97		35		13		5		2	
F		G		H		I		K		
L		M		N		O		P		
	881		189		41		9		2	
Q		R		S		T		V		

longe alia quàm duplicata ſit ratio quantitatum A, F ſimul; ad quantitates L, Q ſimul; rationis C, H ſimul, ad N, S ſimul: quàm item alia quam duplicata ſit hæc ipſa ratio C H, ad N S; rationis D I ad O T. Nec mirum, confunduntur enim rationes partialium terminorum per eorum additionem; eo quod ipſæ ſint heterogeneæ, & diuerſæ inter ſe ſpeciei: ex quarum coalitione, tertium quid ignotum naſci neceſſe eſt, non ſecus ac cum totum ad totum refertur, & ex totis aliquid demitur diuerſæ rationis à ratione totius ad totum; reliquum ad reliquum diuerſam etiam rationem habet à ratione tam totius ad totum, quàm ablati ad ablatum; ita vt nulla ſit inter has rationes partiales con-

nexio, nec vna quidquam cum alia commune retineat, vnde dignosci alterutra vel vtraque possit mutatâ enim rationum essentiâ siue specie, mutari necesse est earum proprietates siue ad multiplicationem, siue ad alias earum mutuas relationes quascumque, pertinentes. Frustra pluribus ostendero hanc Propositionem ita intellectam (vt Authorem intellexisse probatum est) defectum aliquem pati , qui deinceps in Quadraturam Prop. 44. lib. 10. expositam redundet. Ita vt verissimè asseri possit iuxta hanc Propositionem meam 49. totum Quadraturæ defectum Prop. 48. obseruatum, ad Propositionem 12. lib. 10. tanquam ad eius fontem primum acceptum referri debere. Quod erat demonstrandum.

PROP. L. THEOR.

Neque si alio sensu accipiatur Propositio illa duodecima libri 10. à defectûs in Quadraturam deriuati suspicione vendicabitur.

EXPOSITIO.

Quia citatæ illius Propositionis 12. lib. 10. veritas stare non potest; si in eum sensum accipiatur, in quem accipi debere suadet ipsius Authoris ratiocinatio ad eius probationem instituta, ne alioqui vir summus violatæ formæ syllogisticæ apertè dãnetur, vt exposui superiùs: alium ei sensum tribuat non nemo; ex quo, si perpendatur dicta Propositio, à veritate non reperiatur aliena. Atque in eo exponendo enituit R. Patris Alfonsi à Sarasa studium in doctissimis confirmationibus

bus huius Quadraturæ Coroll.9.& 10.quæ habentur ad calcem operis totius.

Cum igitur Author Quadraturæ asserit Prop. 12. lib.10. inquit citatus P. Alfonsus, rationem quantitatum A,F ad L,Q toties continere rationem quantitatũ CH ad NS quoties ratio quantitatum CH ad NS continet rationẽ quantitatũ D,I ad OT.ita intelligendus est

A	B	C	D	E
F	G	H	I	K
L	M	N	O	P
Q	R	S	T	V

vt tantũ velit; *totam rationem quantitatum A,F, ad L,Q constitui ex rationibus sibi additis iuxta sensum Propositionis* 8 (hanc exposui suprà) *quæ rationes toties multiplicatæ sunt rationum earum, quæ sibi additæ iuxta sensum Prop.*8.*constituunt totam rationem quantitatum C*; H *ad N, S*; *quoties rationes istæ constituentes rationem C*, H, *ad N S sunt multiplicatæ rationum illarum, quæ iuxta sensum Prop.* 8. *sibi additæ constituunt totam rationem quantitatis D, I ad OT.* Hæc ille, quibus nihil distinctiùs, nihil explicatius dici potest: eáque non semel sed iterum ac tertiò inculcat citatis locis. Vt verò causam afferat (affert autem grauissimam) cur totalis ratio AF ad LQ toties multiplicata non sit rationis totalis CH ad NS; quoties hæc multiplicata est rationis totalis D, I ad OT, hoc est, cur ratio A, F ad L, Q duplicata non sit rationis CH ad NS, & ratio CH ad NS non sit itidem duplicata rationis DI ad OT. Licet partialis ratio A ad L duplicata sit rationis partialis C ad N: & partialis C ad N duplicata, rationis

rationis partialis D ad O; & eodem modo ſe habeant partiales reliquæ rationes A ad Q, C ad S & D ad T. Itẽ F ad L, H ad N, I ad O. Item F ad Q, H ad S, I ad T. Hæc habet Coroll. 10. *Ratio illius diſcriminis inter totales rationes, & ſingulas partiales ortum habet ex eo, quod rationes ſingulæ partiales non coaleſcunt per multiplicationem ſed per veram additionem & ſubtractionem ſimul: ſeu non coaleſcunt vt multiplicatæ ſunt ſingulæ ſingularum; ſed vt ſunt ſimplices rationes. Imò vt preſſiùs loquar,* inquit, *nulla operatione hic opus eſt: nam citra vllam additionem extrinſecam, coaluerunt iam rationes C ad N, H ad N; C ad S, H ad S, in ratione totali C H ad N S.*

Demonſtratio Propoſitionis.

Veriſſimus eſt hic ſenſus Propoſitionis illius 12. fateor; ex eo vendicatur eadem Propoſitio ab ómni falſitatis labe, Concedo. Sed quæro, leuiórne an grauior defectus committi cenſendus eſt. Si vera hæc Propoſitio concedatur iuxta hunc ſenſum, & eius probatio ſyllogiſmo conſtet, qui forma careat, vt oſtendi carere niſi ex alio ſenſu æſtimetur; an certè falſa dicatur eadem Propoſitio, & legitima admittatur forma ſyllogiſtica, qua demonſtratur? alterutrum enim horum incommodorum admitti neceſſe eſt.

Ad hæc ſi in eo ſenſu ſumi debeat hæc Propoſitio; quid tandem ad circuli Quadraturam concludendam collatura eſt? omnino, vt opinor, nihil, cum tamen totam ſolutionem ex ea deducat Geometra Propoſ. 44. lib. 10. cum enim in hac Propoſ. 44. aſſerit, ex tribus rationibus, quarum tertia Quadraturæ modum,

modum, exhibere debet; primam & ſecundam, notas eſſe, vt verè notæ ſunt, vt ex dictis patet; noti ſunt enim earum termini? tum ſubdit, *Notum etiam erit quoties prima contineat ſecundam, atque adeò quoties ſecunda contineat tertiam; ipſáque proinde tertia nota erit.* Si ita intelligatur prima continere ſecundam toties, quoties ſecunda continet tertiam. Id eſt, prima ratio totalis conſtituatur, iuxta P. Alfonſum, ex tot rationibus partialibus, ex quot conſtituitur ſecunda, & ex tot tertia quot ſecunda: quarum rationum partialium ſingulæ primam rationem conſtituentes toties ſint multiplicatæ rationum partialium ſecundam conſtituentium: quoties hæ ſecundam conſtituentes multiplicatæ ſunt rationum tertiam conſtituentium: quomodo notum eſt, quoties prima ratio contineat ſecundam? coaluerunt enim partiales illæ rationes tam primam quàm ſecundam rationem conſtituentes, & quidem ita coaluerunt, ait idem, vt ſimplices rationes per additionem ſimplicem, non autem vt multiplicatæ, aliæ aliarum: Imò potius termini ſiue quantitates ſimplices, quæ rationum fundamentum ſunt, (ſunt enim Rationes relatiua entia) per additionem factæ ſunt vna totalis quantitas, longè aliam fundans rationem à partialibus rationibus ipſam conſtituentibus, quæ ea additione confunduntur & perturbãtur. Quis ergo dignoſcat partiales eas rationes quæ primã ac ſecundam rationem totalem conſtituunt? quis in noſtro caſu, in quo per indiuiſibilia proceditur, ac proinde infinitæ ſint illæ partiales rationes? quis ſpeciem rationum ipſarum partialium, quæ om-

nes inter se specie differunt; licet omnium multiplicatio eiusdem sit speciei; assignare queat? Notæ ergo non sunt in eo sensu prima & secunda ratio; notum, inquam non est quoties prima ratio contineat secundam, nec ex iis nosci potest tertia ad Tetragonismum necessaria. Præterea cum in his tribus rationibus nihil reperiatur commune, quod per connexionem aliquam ex duabus rationibus datis tertiam exhibeat; præter multiplicationem; quomodo nisi illam adhibuisset Geometra; & ex multiplicatione rationum partialium, totalium multiplicationem colligere voluisset, iuxta sensum à me expositum Propositionis 12. ex duabus totalibus rationibus, tertiam notam fieri asseruisset? & quidem tam leui, vt ipse censuit, operâ vt vno aut altero verbo id indicasse, satis ipsi visum sit. Quod si necdum hæc cuipiam satisfecerint contendátque Propositionem illam 12. in eo sensu, quo R. P. Alfonsus eam exponit non tantùm veram esse, sed etiam ad conclusionem Propositionis 44. Quadraturæ modum continentis sufficere: huic ego propono hasce duas rationes. Prima est numeri 18 $\frac{1}{4}$ ad 222 $\frac{1}{4}$. Secunda est numeri 9 ad 95 $\frac{1}{2}$. Prima ratio constituitur ex duabus rationibus sicut & secunda: sunt vero rationes duæ partiales primam constituentes bis multiplicatæ duarum rationum partialium secundam constituentium. Quæro igitur vt is mihi exhibeat ex duabus datis tertiam rationem, quam duæ rationes partiales constituant: quarum singularum duplicatæ sint duæ rationes secundam constituentes; idque non casu sed ex arte certâ

tâ & demonſtratâ perficiat? Reſponſum operior quod ſi huic meæ quæſtioni ſatisfacere nequeat, quæ tamen duas tantùm rationes partiales adhibet quæ totales primam & ſecundam conſtituunt: quomodo ſatisfacturum ſperem Propoſitioni 44. Authoris, in qua tertia ratio quæritur ex duabus notis prima & ſecunda, quæ ex rationibus partialibus non iam duabus, vt hic, ſed infinitis, cum per indiuiſibilia procedatur vt conſtat ex Prop. 39. & 40. ſingulæ conſtituantur? hæc ſatis multa, ad rem tamen tantam non nimia paucioribus opus omninò fuiſſet: ſi idem R. P. Alfonſus ſenſum, ex quo Propoſitionem illam duodecimam lib. 10. vult concipi, vt vera ſit, applicuiſſet concluſioni Propoſitionis 44. quæ terminis enunciatur eiſdem plane, eandemque rationum mutuam illam continentiam exprimentibus: tradidiſſet forſitan ipſe, quod hic ego propoſui, &, opinor, euidenter probaui nimirum circuli Quadraturam hanc abſolui mediâ illâ Propoſitione 12, vel omninò non poſſe, ſi verus ei ſenſus tribuatur; vel non niſi falsò poſſe, ſi ex ſenſu pendatur Authoris: adeo vt, vtrouis modo ſumatur, ea ſola totum hunc Tetragoniſmum in apertum diſcrimen adducat: nec leue de reliquis tribus inſequentibus, quorum par videtur cauſa, ex hoc iam fieri præiudicium poſſit. Verum propiùs contemplandi ſunt; quod aggredior.

Scholium.

Ex his duabus Propositionibus egregiè confirmatur decretoria illa Propositio 48 : quam, vt æquissimam tueor. Quamuis (cuius mé dolet) tardiùs comperi lapsum quendam in numeris, qui in illam influunt, Prop. 38. statutis : quem, vt longiùs à prælo absum, auertere tempore non potui suo. Nunc, ne cui quidpiam scrupuli resideat, auerto.

A	B	C
$\frac{9}{128}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{240}$
D		E
$\frac{331}{3840}$		$\frac{203}{1920}$
F		G
$\frac{2}{15}$		$\frac{203}{960}$

Citatâ Prop. ex Additione fractorum A, B, C (in re facili erres faciliùs) collectus est D : colligendus erat E. Vnde Propos. 45. extremâ seponendi erant F & G. Exinde, solutione Propositionis 47. ad hos numeros F & G applicata, reperientur numeri E C ope numerorum, quos ordine suo refert hoc schema.

A 1408.	D 1512.	B 1624.	E 1683.	F 1744
C 2233.	C 2233.	C 2233.	C 2233.	C 2233

Itavt Ratio E 1683 ad C 2233 ea sit, quæ quæritur. Hæc autem eadem est cum Ratione Quadrantis A I K ad mixtum Quadrilaterum Z O K L H, vt Prop. 48. declaratur; cuius Conclusionem iuxta restitutos numeros E & C repeto. Vt Quadrans A I K ad mixtum Quadrilaterum Z K; ita E 1683 ad C 2233. Ergo vt duæ tertiæ Quadrantis A I K, nempe sector I O L, ad Quadril. Z K; ita duæ tertiæ numeri 1683, nempe 1122 ad C 2233. Et Diuidendo. Vt sector I O L ad Triang. O I L, ita 1122 ad 1111 excessum numeri 2233 supra 1122. Sed Trapezium I O K L (ductas concipe rectas K O, K L) maiorem habet Rationem ad Triang. O I L; quàm 1122 ad 1111 (vt enim Trap. I O K L ad Triang. O I L; ita I K 100 000 sinus totus ad I C 86603 sinum G. 60) Ergo Trap. I O K L per 10. lib. 5. maius est sectore I O L, pars toto. Quod, &c.

Addo etiam ex occasione, nouam, quæ occurrit Confirmationem illius Prop. 48. Vt sector I O L ad Triang. O I L : ita Circulus ad Hexagonum Circulus verò posito radio 100 000 est proximè 314159. Hexagonum autem 259809. At longè aliam Rationem seruant hi numeri 1122. 1111. Ergo admitti non debent.

Hoc Argumento reiicientur etiam, quæ in eiusdem Prop. 48. scholio traduntur ex altero sensu. Numeris enim 256. & 331, substituentur 128, & 203 : & numeris 331 & 484, numeri 203 & 242. Ex quibus, vt ibi declaratur, concludetur Rationem 135 $\frac{1}{3}$ ad 106 $\frac{2}{3}$ siue 203 ad 160, eandem esse cum Ratione sectoris I O L ad Triang. O I L, vel Circuli 314159 ad Hexagonum 259809. At longè sunt dispares hæ Rationes duæ : & longè longiùs Ratio 203 ad 160 recedit à verâ, quàm 314159 ad 259809 : quæ veræ proxima est.



LIBER TERTIVS.

Tres reliquæ Authoris Quadraturæ expenduntur, & quod subesse videtur vitium, aperitur.

PROP. I. THEOR.

Si circa axem A B Parabola quæpiam M A D descripta sit: cuius lateri recto æqualis linea A I super axe reponatur à vertice A: & per I Applicata ducatur ordinatim I M. Dico ordinatam I M esse æqualem ipsi lateri recto, siue lineæ A I.

Demonstratio.

Quadratum ordinatæ I M æquale est per 11. lib. 1. Apoll. rectangulo, quod sub sagitta abscissa I A & latere recto continetur. Sed I A æqualis est lateri recto ex constructione: ita vt rectangulum illud sub I A & latere recto Quadratum sit. Ergo Quadratum ordinatæ I M æquale est Quadrato lateris recti. Ergo & ipsa Qua- Fig. 25.

dratorum latera, nimirum latus rectum & ordinata I M sunt lineæ æquales. Quod erat demonstrandum.

Figura Vigesimaquinta.

PROP. II. THEOR.

Si duæ lineæ A I, A M angulum semirectum contineant M A I: describantur autem circa earum alteram A I tanquam axem, Parabolæ quæcumque, quotcumque verbi gratia, M A D. Dico Parabolam quamcumque secari ab altera linea in M. Vnde si ordinata ad axem ducatur M I,

M I, æqualis ea ſit tam lateri recto, quàm abſciſſæ ſagittæ I A.

Demonſtratio.

Clara eſt hæc Propoſitio ex præcedenti. Cum enim ex conſtructione angulus I A M ſit ſemirectus, rectúſque angulus I: erit ſemirectus angulus A M I, atque adeò æqualis angulo A trianguli A I M. Æqualia ſunt ergo latera I A, I M. Quia verò Quadratum I M æquale eſt rectangulo ſub I A & latere recto: rectangulum illud Quadratum eſſe neceſſe eſt; atque adeò latus rectum, quod Quadrati latus alterum eſt; æquale erit lineæ A I ad verticem abſciſſæ; ergo & alteri lineæ quæ ſit eidem A I, æqualis; ordinatim ſcilicet Applicatæ I M. Quare ſi duæ lineæ, &c. Quod erat probandum. *Fig. 25.*

PROP. III. THEOR.

Si à vertice A Parabolæ cuiuſuis M A D, linea recta emittatur faciens cum axe A I angulum ſemirectum, Parabolam ſectura eſt, vt in M. Vnde ſi Applicata ad axem ducatur M I: erit tam Applicata M I, quàm abſciſſa I A, lateri recto Parabolæ æqualis. *Fig. 25.*

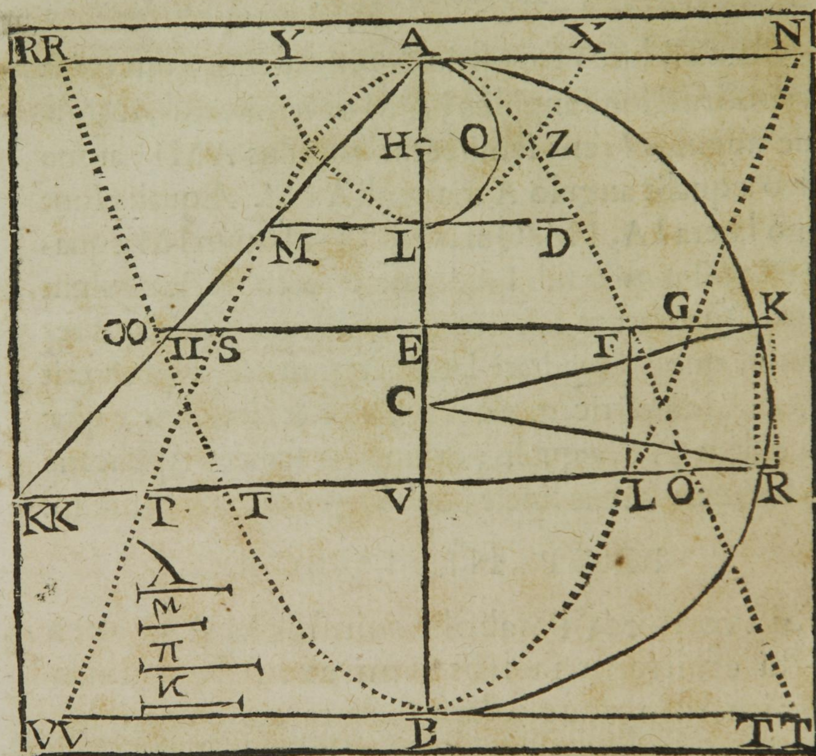
Demonſtratio.

Nam in triangulo A I M, cum angulus I, ſit rectus, & A ſemirectus; ſemirectus erit & M; atque adeo latera I M, I A æqualia per 5. lib. 1. Quibus vtriſque æquale eſſe neceſſe eſt latus rectum Parabolæ, vt ex præce- *Fig. 25.*

denti

denti ratiocinatione patet. Quare si à vertice, &c. Quod erat demonstrandum.

Figura Vigesimaquinta.



Corollarium I.

Fig.25. Hinc ergo primò modus habetur perfacilis definiendi latus rectum datæ cuiusuis Parabolæ. Si enim ducatur linea recta A M cum axe A I angulum semirectum continens: ea secabit Parabolam in puncto, vt M, à quo si ducatur ad axem A I ordinatim Applicata M I; erit tam ipsa M I; quam abscissa sagitta I A, æqualis lateri recto Parabolæ.

Corolla-

Corollarium II.

Hinc etiam ſequitur, ſi ſumpta ſagitta A I æquali lateri recto, ductáque ordinatâ I M; emittatur à vertice A linea, quæ cum axe A I angulum ſemirectum contineat, ipſum per M, in quo ordinata Parabolam ſecat, neceſſariò tranſituram.

PROP. IV. THEOR.

Sit A B axis communis æqualium & ſimilium Parabolarum ſubalterne poſitarum A M S, B L G. Circa verò axem communem A B ſemicirculus deſcribatur, quem linea quæuis ordinatim Applicata ad axem, ſecet in K; Parabolas autem ſubalternas in S & G. Dico lineam E K ad lineam E G ita ſe habere: vt linea E S ſe habet ad latus rectum Parabolarum. *Fig. 25.*

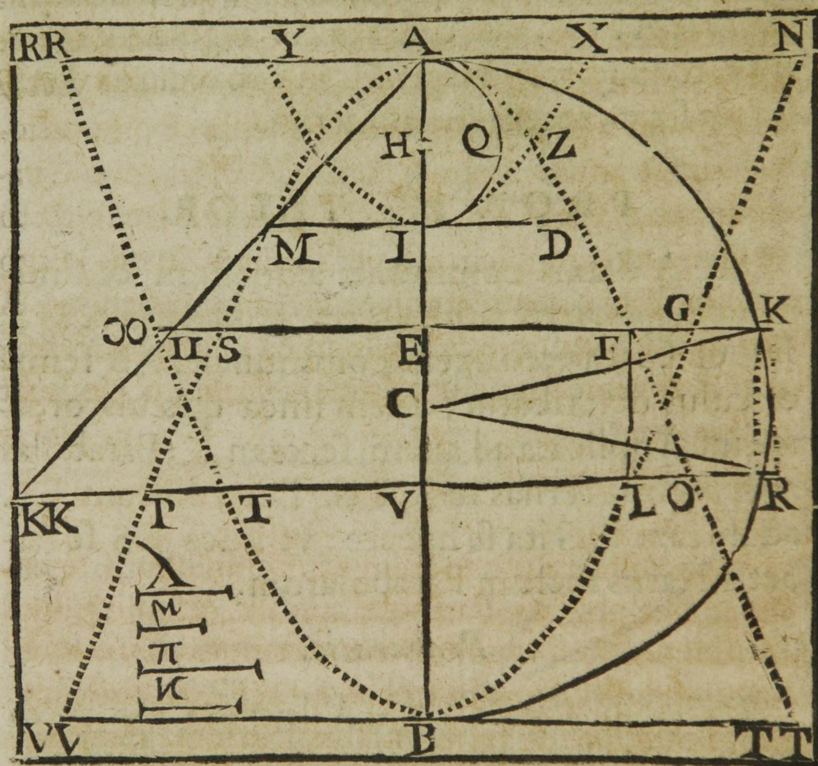
Præparatio.

Abſoluatur Parabola S M A deſcripto eius altero cornu A F O. Erunt obuerſa inter ſe duarum Parabolarum cornua A F O, B L G: eritque E F æqualis ordinatæ E S: ita vt aſſeri poſſit eodem modo, quatuor lineas E K, E G; &, E F & latus rectum, eſſe proportionales. Item ſumptâ B V æquali, linea A E; ſiue C V æquali, ſumpta lineæ C E: ducatur per V ad axem normalis ſecans in R circulum; obuerſas verò Parabolas in L & O. Erunt ergo E K, V R æquales ob æquales poſitas A E, B V. Æquales item propter eandem *Fig. 25.*

 rationem

rationem tam EF, VL; quam EG; VO. Sunt enim Ordinatim Applicatæ à verticibus A & B æqualium & ſimilium Parabolarum æqualiter diſtantes.

Figura Vigeſimaquinta.



Demonſtratio.

Cum ad ſemicirculi diametrum AB ſit EK perpendicularis, atque adeo media proportionalis inter diametri ſegmenta AE, EB: erit AE: prima trium proportionalium AE, EK, EB, ad tertiam EB: vt Quadratum primæ AE ad Quadratum ſecundæ EK. Sed vt AE ad EB, ſiue ad AY, lineæ EB æqualem; ita

ita eſt per 20. lib. 1. Apoll. Quadratum E F ad Quadratum V O. Ergo vt Quadratum A E ad Quadratum E K; ita eſt Quadratum E F ad Quadratum V O. Ergo etiam horũ Quadratorum proportionalium proportionalia erunt latera. nempe erit A E ad E K; vt E F ad V O ſiue ad E G, lineæ V O æqualem. Et permutando. vt A E ad E F; ita E K ad E G. Sed E F media eſt proportionalis inter latus rectum & lineam A E (eſt enim Quadratum lineæ E F æquale rectangulo ſub latere recto & linea A E comprehenſo per 11. lib. 1. Apoll.) Ergo ita eſt E F ad Latus rectum, vt E A ad E F. Sed vt E A ad E F; ita oſtenſa eſt E K eſſe ad E G. Ergo E K, E G; & E F, Latus rectum, ſunt proportionales. Quod erat probandum.

Scholium.

Non alio ſanè modo idem demonſtrabitur, ſi ſubalternæ ſiue obuerſæ Parabolæ æquales & ſimiles, alios & alios vertices oppoſitos nanciſcantur. Cuiuſmodi ſunt Parabolæ duæ obuerſæ A Z D, I Z X: circa quarum communem axem A I ſemicirculus deſcribatur A Q I; & linea quæuis ad axem perpendicularis tam circulum quàm Parabolas ſecans, adinſtar lineæ E K, ducatur. Eadem enim ſemper futura eſt demonſtratio.

PROP. V. THEOR.

Deſcriptis, vt in præcedenti Propoſitione, duabus Parabolis æqualibus & ſimilibus ſiue ſubalternis A S V V, B L N; ſiue obuerſis A F T T, *Fig. 25*

Figura Vigesimaquinta.

BLN. Descripto etiam circa axem communem AB semicirculo: ductis præterea ordinatim Applicatis quibuscumque EF, VO; quæ, si producantur, circulum secent in K & R. Dico corpus Cylindricum mixtum; cuius scilicet basis sit Quadrilaterum mixtum EKRV, & altitudo sit latus rectum Parabolarum: æquari corpori quod oritur ex segmento EVPS ducto in segmentum subalternum EVLG: vel, æquari corpori, quod ex segmento EVOF

ducto in ſegmentum obuerſum E V L G, generatur. Imò totus ſemicylindrus, cuius baſis eſt ſemicirculus A K R B, & altitudo latus rectum Parabolarum, æquatur ſolido: quod ex tota Parabola A B V V ducta vel in totam Parabolam ſubalternam A B N, vel, quod idem eſt, in totam obuerſam A B R R, generatur.

EXPOSITIO.

Hæc vna Propoſitio mea tres complectitur Propoſitiones doctiſſimi Geometræ. Prima earum eſt 143. libri de ductibus. Secunda eſt 51. lib. 10. eadémque eſt *Fig. 25.* cum priore, noua tamen & ampliore probatione confirmata: tertia denique eſt 68. Prop. eiuſdem lib. 10. Duæ priores, quæ idem ſonant, in caſu tantùm ſingulari verſantur: cum ſcilicet axis communis A B duarum Parabolarum obuerſarum circa quem ſemicirculus baſis futuri ſemicylindri deſcribitur, æqualis eſt lateri recto Parabolarum. Tertia verò illa Propoſitio 68. lib. 10. Vniuerſalis eſt liberámque admittit quantitatem axis A B communis, circa quem baſis circularis ſemicylindri deſcribatur: quemadmodum eandem conditionem admittit Propoſitio mea. Verum in aſſignanda altitudine ſemicylindri illius, qui ſuper ſemicirculo circa axem A B deſcripto erigatur: quíque ſit *Fig. 25.* æqualis ſolido ex ductu in ſe Parabolarum ſubalternarum; in eo, non opponimur quidem, verùm diſſimiles ſumus: quod ego altitudinem ſemicylindri, certam ſemper & vnicam definio: quantitatem ſcilicet lateris

Figura Vigesimaquinta.

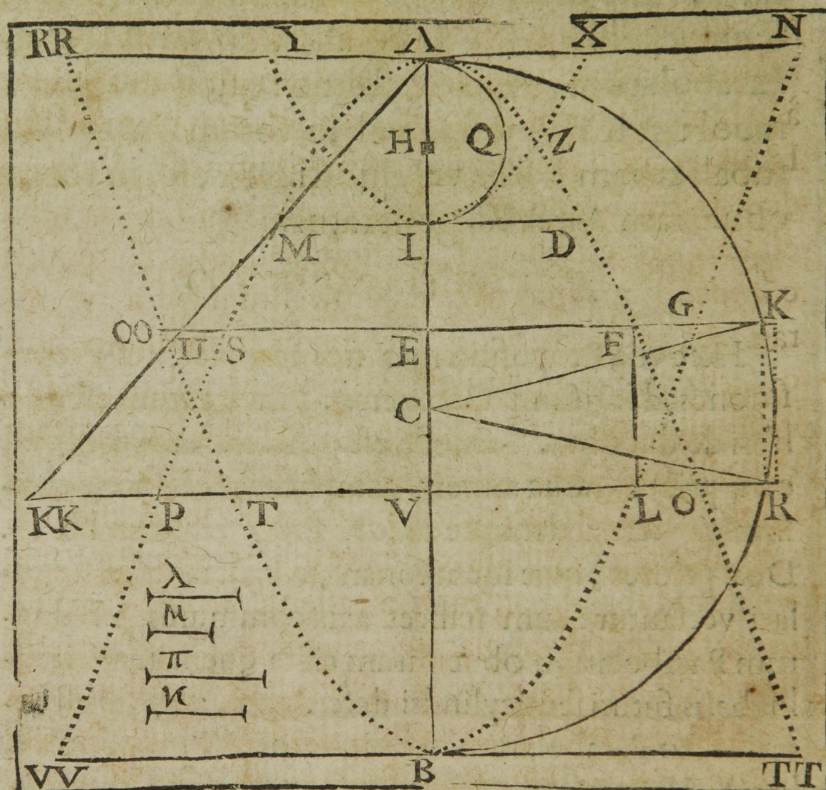


Fig. 25. recti Parabolarum quæ in se subalterne ducuntur. Author verò Quadraturæ Prop. 68. lib. 10. citatâ altitudinem illam ita determinat, vt eam velit esse latus rectanguli illius, cuius alterum latus sit in figura nostra linea EK quódque æquale sit rectangulo à duabus ordinatim Applicatis EF, EG, constituto: quam sanè altitudinem clariùs & immediatiùs determinasset, si eam asseruisset tribus lineis EK, EG & EF quartam esse proportionalem: ex eo enim sequitur vt rectangulum

lum ſub E K & quarta illa proportionali æquale ſit re-ctangulo ſub ordinatis E F, E G. Illa verò quarta proportionalis quocumque caſu poſito axis A B communis Parabolarum, id eſt, quocumque ſpatio diſtent à ſe inuicem vertices A & B Parabolarum, ſemper erit Latus rectum axi Parabolarum congruens. Vt clare demonſtraui Prop.4.proxime Antecedenti: Quæ mira eſt Lateris recti facultas, mirúmque mihi præbitura eſt compendium cum ad calculum ventum fuerit: vt mirari ſatis nequeam vel à Geometra ſubtiliſſimo non obſeruatam, vel obſeruatæ mentionem nullam factam. Nullum ergo aliud diſcrimen eſt inter hanc meam Propoſitionem, & tres illas citatas Authoris Tetragoniſmi, niſi quod in definienda illa ſemicylindrorum altitudine, qui ſint æquales ſolidis ex ductu Parabolarum ſubalternarum ortis, aſſeruerim ego eam eſſe *Fig.25.* Latus rectum Parabolarum: aſſeruerit ille, eam eſſe Latus rectanguli cuiuſdam; ſiue idem ſiue diuerſum in diuerſis caſibus exiſtat, non attendens, vel non curans; Quod tamen, vt expoſui, aliud nunquam erit, quam Latus rectum Parabolarum: ita vt allata hæc Propoſitio mea ab illis tribus in re nullo modo diſſentiat: atque adeo demonſtratio Authoris æque huic meæ, atque illis tribus conueniat; quam vt firmiſſimam admitto, nec aliquam eius confirmationem (quæ ſane ſuppeteret) afferendam cenſeo breuitatis causâ conſulatur ergo Author ſuper hac re, & ex citatis locis Probatio petatur vnde conſtet, quod deſcriptis, vt in præcedenti, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

Fig.25. In eodem ſchemate (eodem vtor quo tritius euadat & familiarius, ac ita in materia difficili clarius) ſit Parabola P A O: cuius vertex A, & axis A V: fiat autem ad ipſum verticem A angulus ſemirectus contentus axe A V, & alterâ lineâ A K K, quam ſecet in K K producta ordinatim Applicata V P: eandem etiam ſecet in I I alia quæuis ordinatim Applicata E S producta.

Figura Vigeſimaquinta.

Dico ſemiparabolam A V P ductam in ſemiparabolam

rabolam AVO: siue quod idem est, semiparabolam AVO ductam in se, corpus producere æquale solido: cuius basis sit triangulum AVKK; altitudo verò latus rectum Parabolæ.

Dico præterea Quadrilaterum Parabolæ segmentum EVOF, siue EVPS in se ductum generare solidum æquale solido; cuius basis sit Trapezium EVKKII; altitudo verò idem etiam latus rectum Parabolæ.

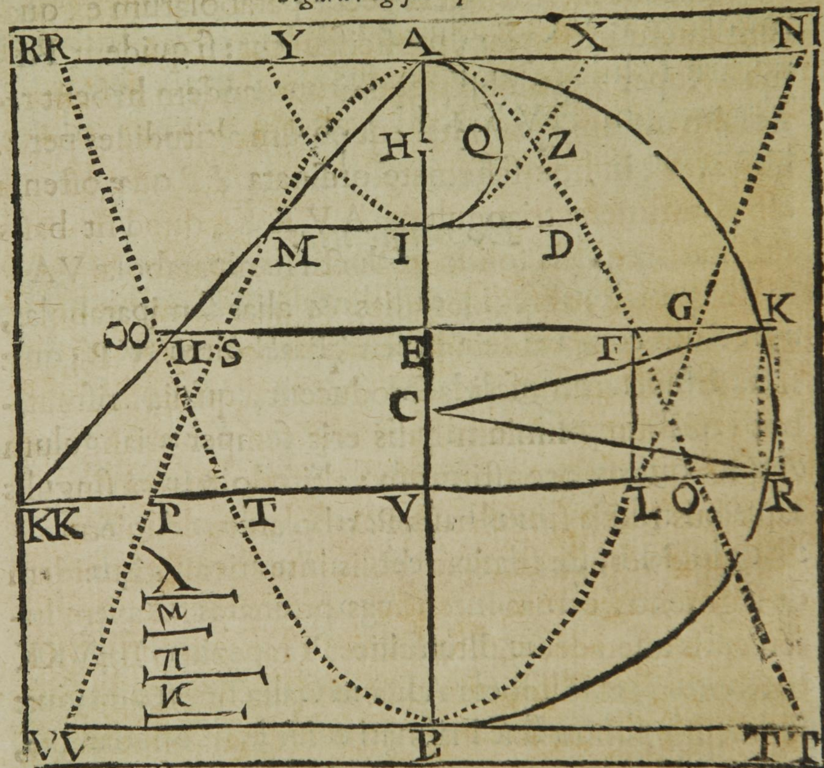
Demonstratio.

Per punctum M, in quo linea AKK angulum semirectum cum axe constituens, Parabolam secat: ducatur ad axem ordinata MI. Hæc erit per Prop. 3. huius, lateri recto æqualis. Sed per Prop. 161. Libri ductuum corpus ortum ex semiparabola APV in se ducta, est æquale Prismati, cuius basis est triangulum AVKK, & altitudo MI, siue latus rectum Parabolæ, ipsi MI ostensum æquale. Constat ergo prior Assertionis pars. *Fig. 15.*

Posterior verò sic ostenditur. Per citatam Prop. 161. ductuum. Semiparabola AES in se ducta generat corpus æquale solido siue Prismati cuius basis est triangulum AEII; altitudo verò recta MI siue latus rectum. Si ergo à Prismate, cuius basis est triangulum AVKK, & altitudo latus rectum, cui est æquale ostensum solidum ex ductu semiparabolæ AVP in se genitum: demantur Prisma super triangulo AEII ad altitudinem lateris recti constitutum, æquale ostensum solido ex semiparabola AES in se ducta genito: remanebit soli-

dum super basi Quadrilatera E V K K I I ad altitudinem lateris recti excitatum, æquale solido, quod fit ex Quadrilatero mixto S E V P in se ducto. Vtraque ergo pars Assertionis vera est.

Figura Vigesimaquinta.



Corollarium I.

Fig. 25 Hinc fit vt si aliæ & aliæ Parabolæ, Parabola V A T T ampliores vel angustiores, provt latus earum rectum maius erit vel minus latere recto M I Parabolæ V A T T, describantur: omnes semiparabolæ eadem ordinatim Applicata tanquam base abscissæ si in se ducantur, solida

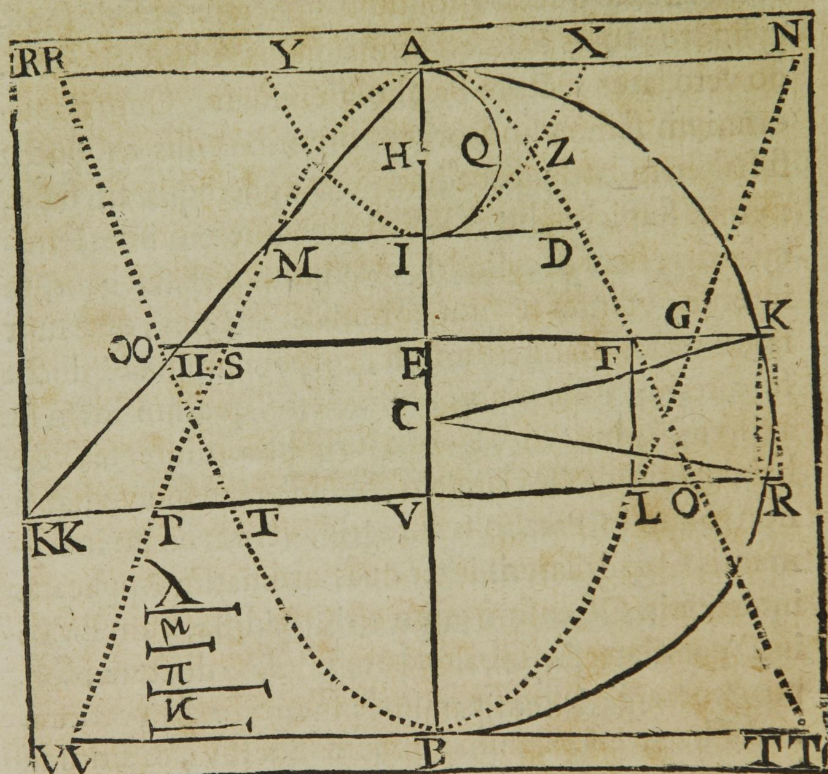
ſolida generent æqualia Priſmatibus, quorum omnium baſis vna eademque ſit ſolaque altitudine differant, quam metitur latus rectum in diuerſis parabolis diuerſum. Ac propterea ita ſe habeant huiuſmodi corpora, vt ſe habent inter ſe latera recta parabolarum ex quarum ductu in ſeipſas, proficiſcuntur: ſi quidem Priſmata ſuper æquali baſi conſtituta eandem habent rationem inter ſe, quam habent eorum altitudines per 8. lib. 12. Vt in hoc ſchemate ordinata V P quæ oſtenſa eſt conſtituere triangulum A V K K, quod ſit baſis Priſmatis æqualis ſolido ex ductu ſemiparabolæ V A P in ſe genito; abſcindet alias & alias ſemiparabolas, quemadmodum abſcindit ſemiparabolam A V P; quæ ſi in ſe ducantur, ſolida producent æqualia Priſmatibus; quorum omnium baſis erit ſemper triangulum A V K K ſemel conſtitutum: altitudo verò à ſingulis lateribus rectis ſingularum Parabolarum definietur.

Quod verò de ſemiparabolis integris aſſeritur: idem de ſegmentis earum inter duas ordinatas ad axem interceptis aſſeri debet. Erit ſcilicet Trapezium IIEVKK baſis omnium ſolidorum quæ æqualia ſint ſolidis, quæ ſegmenta parabolica inter duas ordinatas intercepta, cuiuſmodi eſt ſegmentum S E V P, in ſe ducta generant: ita vt horum omnium ſolidorum diſcrimen totum ſit penes diuerſam quantitatem laterum rectorũ.

Corollarium II.

Ex Propoſitione 5. præcedente colligitur idem contingere in ductibus ſubalternis ſemiparabolarum ea- *Fig. 25.*

Figura Vigesimaquinta.



rúmque partium : quod circa ductus directos earumdem contingere proximè declaraui. Si nimirum circa eundem axem A B, quotcumque, quæcumque Parabolæ subalternæ describantur (cuiusmodi sunt duæ A B V V, B A N) maiores minorésve : eæque hoc in situ subalterno ducantur in se : generabuntur corpora ex iis ductibus subalternis ; quorum Ratio eadem erit, quæ est laterum rectorum singularum Parabolarum ex quarum ductu subalterno orta sunt. Ostensum siquidem

Fig.25.

quidem eſt quamcumque ſemiparabolam A B V V in ſe ſubalterne ductam ſolidum generare æquale ſemicylindro; cuius baſis eſt ſemicirculus A K R B, altitudo verò latus rectum Parabolæ eiuſdem. Cum itaque omnium ſemicylindrorum corporibus illis ex ductu ſubalterno ortis æqualium, vna eadémque ſit baſis, nempe ſemicirculus A K R B. Sint autem omnes ſemicylindri, ſicut & cylindri, quorum æqualis eſt baſis, ita inter ſe, vt inter ſe ſunt eorum altitudines, quæ ſunt latera recta. manifeſtum eſt, corpora omnia ex ductu ſubalterno Parabolarum omnium, quarum idem ſit axis, verbi gratia, A B, genita ita ſe habere inter ſe, vt ſe habent ſingularum latera recta. Id porrò locum habet non ſolùm in Parabolis integris, verum etiam in ſegmentis Quadrilateris inter duas ordinatim Applicatas interceptis. Oſtenſum enim eſt Quadrilaterum EVPS in Quadrilaterum ſubalternum E V L G ductum, corpus generare; quod ſit æquale ſemicylindri portioni, cuius baſis eſt planum mixtum EKRV, & altitudo latus rectum parabolæ P A O. Quod de omnibus Parabolarum ſubalterne poſitarum circa axem communem A B, ſegmentis inter eaſdem lineas parallelas SEF, P V O interceptis demonſtrari poteſt. Sed corpora omnia ſuper baſi eadem E K R V, ita erecta; non aliter ſe habent inter ſe, quàm ſe habeant altitudines, quæ ſunt latera recta Parabolarum; ſeruant enim huiuſmodi corpora licet mixta, quorum facies ſuperior eſt baſi eorũ, & parallela & æqualis & ſimilis, rationes vel Priſmatum vel Cylindrorũ; quorum partes quædã ſunt. *Fig.* 25.

Monitum.

Conſequenter ad duas præcedentes Propoſitiones 5.& 6.in quibus definitur; cui ſolido ſit æquale corpus ortum ex ductu tum directo, tum ſubalterno; tam integrarum Parabolarum, quam earum quarumdam partium mixturam, quas duæ ordinatæ & axis circumſcribunt vnâ cum arcu ab ordinatis intercepto. Definienda nunc forent corpora, quibus æqualia ſunt ſolida ex aliis ſegmentis Parabolarum, quibus ea conditio non competit, vt axis ſit aliquot eorum latus. Sed loco id oſtendetur ad concipiendum aptiori, vbi ad calculum ventum fuerit: quo duas præ cæteris Propoſitiones, ex quibus tota vel firmitas vel ruina Tetragoniſmi non tantùm ſecundi; quo de agimus hic ex Inſtituto; ſed etiam tertij & quarti, vt conſtabit conſequitur. Earum prior eſt ſexageſima ſecunda lib.10.operis Geometrici: poſterior verò eſt eiuſdem lib. 10. ſeptuageſima ſeptima: quas neceſſarium eſt hic in medium adducere, vt ſcopus percipiatur in quem tandem contendant omnia ferè, quæ in poſterum propoſiturus ſum, certiúſque de hac lite tota, quæ ex iis pendet, iudicium feratur. Prior ergo in hæc verba ſonat, quam ſeruato ordine meo exhibeo.

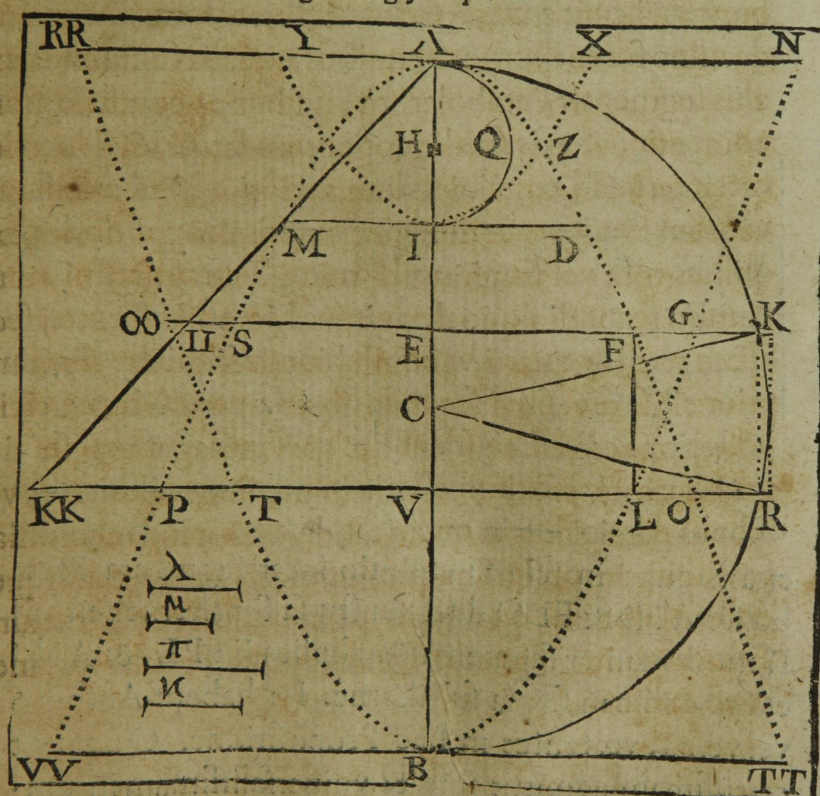
PROP. VII. THEOR.

Authoris Quadraturæ 62.lib.10.

Fig.25. Eadem, inquit, figura manente, id eſt, in ſchemate meo

meo persimili, quo vti me expedit. Sit Parabola PAO: in qua sumantur duæ diametri æquales quælibet, vt AI (quæ axis est, licet id minime sit necessarium) & FL. Et per earum extrema puncta I, & L ad ipsas ducantur perpendiculares ID, VLO; quæ ad axem erunt ordinatim Applicatæ.

Figura Vigesimaquinta.



Dico (pergit ipse) Rationem, quæ est inter segmenta Parabolica AID, & FLO ducta in seipsa (id est inter corpora ex illis ductibus orta) esse ad Rationem quæ est inter segmenta Parabolica FSPL & AIM

etiam

Figura Vigeſimaquinta.

etiam ducta in ſeipſa: vt Ratio inter ſegmenta Parabolica AID & FLO ducta in ſeipſa ſubalterne; eſt ad Rationem inter ſegmenta Parabolica FSPL, & AIM etiam ducta in ſeipſa ſubalternè. Ita habent Authoris vel verba, vel ſenſus in hac Propoſitione. Quam vt certiſſimam admittit ipſe & vniuerſaliſſimam in omni caſu & loco, in quo ſumere libeat diametros æquales AI, FL. Per quarum extrema puncta ducantur lineæ ad axem perpendiculares, ſiue ordinatim ad axem

Applicatæ

Applicatæ. Hæ enim ſuperficies parabolicas ſemper continebunt, quæ in ſe ductæ eo ordine, qui hic obſeruatus eſt; ſolida generabunt dictas hic rationes ſemper obſeruantia. Hic ego caſum aſſumo de induſtria, in quo altera aſſumptarum diametrorum ſit etiam axis, qualis eſt A I; licet parallelarum altera per eius extrema puncta ductarum, nempe quæ per A ducitur, Parabolam non ſecet, ſed eam tantùm in A tangat. Neque enim minùs hæ quam aliæ quælibet parallelæ per extrema diametrorum æqualium ductæ, duas ſuperficies claudunt parabolicas, ſolida per ſuos ductus generandi capaces; quæ cum ſolidis ex aliis alio in ſitu poſitis ſuperficiebus, ortis comparari queant. Ideo verò caſus hic peculiaris à me hic adhibetur; ſæpiúſque adhibebitur in poſterum ob inſignia quæ præſtat in calculo compendia, vt experientia docebit; iámque vel ex eo patet: quod clauſa inter Parallelas ſegmenta duo AID, AIM ſunt æqualia ipſique axi adiacent reliquarum diametrorum & nobiliſſimo & notiſſimo.

Demonſtrationem quam habet Author ad veritatem Propoſitionis huius ſuæ ſtabiliendam, non adſcribo: tum quia ei, numerorum luce coactus olim non ſubſcribam: tum quia longioris eſt operæ, & grauioris quàm exigat inſtitutum meum; cui ſufficit ſola ipſa & ſimplex expoſitio Propoſitionis, eiúſque ſenſus declaratio. Quod à me eſt præſtitum cumulate.

Monitum.

Secunda Authoris Propoſitio, de qua ſuperiùs in

 monito

monito Propositionis 6. facta est mentio, ipsa est 77. & vltima, qua rectilineum aliquod Curuilineo æquale exhibere conatur; atque vtinam fœlix euentus tanto conatui tandem respondeat; sitque æquum tanti laboris, industriæ, & operæpretium. Sed in dubium, hanc ipsam solutionenm reuocare videtur iudicium Arithmetices; dum in præcedentem Propositionem, cui tota Problematis soluendi ratio innititur, sententiam fert condemnationis, quo verò iure, constabit abundè inferiùs: Id in præsentiarum videndum. Quomodo solutio Problematis ex citata Propositione ita pendeat, vt ea concussa, ipsa stare nequeat. En ergo Authoris si verba non omnia, merus tamen sensus ex schemate meo exhibitus, & in ordinem meum reposita Propositio.

PROP. VIII. PROLB.

Authoris 77. Libri Decimi.

Fig. 25. Sit axis AB Parabolarum AFO, BLG; & AZD, IZX subalterne constitutarum: sumptis deinde AE, BV æqualibus, eius quantitatis, vt intercepta linea EV æqualis sit lineæ AI (quod facile fiet, si AB bifariam in C; & AI bifariam in H diuidantur: sumantúrque CE, CV æquales lineis HA, HI: erunt enim tunc AE, BV. æquales; detractis scilicet CE, CV æqualibus ab æqualibus CA, CB) ducantur demum ordinatim Applicatæ EG, VO: & ID. quæ producantur quantùm satis, *Oporteat autem,* inquit, *rationem exhibere; quæ est inter corpora, quæ oriuntur ex subalterno*

ductu

Figura Vigesimaquinta.

ductu segmenti Parabolici AID in se, hoc est, in segmentum IAX: & ex ductu subalterno FLO in se, hoc est, in segmentum LFG. Vel inter solida, quæ fiunt ex ducto subalterno planorum AIM in IAY; & FSPL, in FOOTL: vel planorum his æqualium SFOT, in SGLT.

Constructio & Demonstratio.

Demonstratum est, inquit Author, Prop. 62. (ea est præcedens Prop. 7.) *quod proportio, quæ est inter rationes solidorum*, quæ fiunt ex ductu AID *in se*; & *ex ductu* *Fig. 25.*

FLO in seipsum: & ex ductu FLPS in se; & AIM in seipsum, eadem sit cum Proportione, quæ reperitur inter rationes corporum, quæ fiunt ex ductu subalterno eorumdem planorum. Igitur Permutando, Proportio quæ est, &c. olim reliqua hæc interim satis.

Quid enim pergam vlteriùs? Nunquid non satis patet ex his, totam Problematis huius constructionem eiúsque demonstrationem ex citata & explicata ad Prop. 7. huius. Propositione illa 62. ita pendere, vt ex illius statu huius etiam fortuna tota pendeat? quod hic declarare quàm fieri potuit apertissime, necessarium erat; cum eam solam Propositionem in dubium adducant numerorum rationes exponendæ. Quas ante quam moneo.

Subsisto paulisper admiratione defixus cur Author celeberrimũ illud Problema: quod omnes Geometriæ facultates copiosissimas elusit hactenus: In cuius gratiam tam multam Propositionum vim arduo sane diuturnóque labore ipse congessit; tam paucis perstrinxerit; solutionéque tam leui concluserit vix vt tres versiculorum ordines adæquet, eósquet obiter & quasi porisma quoddam proposuerit. Sed hac in re consultissimi viri institutum absit vt carpam quod eò venеror magis, quo minùs eius conscius ego sum: Pluscula fortasse ad calcem de tota hac solutione in medium adducam: Interim expositionem aggredior eorum, quæ citatam illam Propositionem 62. in discrimen adducere videntur. Quæ tota exercitatio vt planior fiat: quædam tanquam prænoscenda prius expono.

Monita.

Monita.

Primò ergo obſeruandum eſt: cum duplex methodus iniri poſſit, qua ſuperiùs allata propoſitio ſeptima, quæ eſt Authoris ſexageſimaſecunda libri 10. diſcutiatur: altera, qua principia vel concluſiones, vnde totum robur ſuum haurit, perpendantur: altera, qua ex eius ſuppoſitione facta, obſeruetur, ſi quid vel impoſſibile vel abſurdum, aut aperte falſum conſequatur; vt hinc arguatur, iuxta Logices ſtatuta, aliquid vitij admiſſum in Antecedentibus, licet necdum conſtet vbi lateat: breuior mihi viſa eſt & abſolutior ſecunda hæc ratio. Vbi præſertim obſeruaui me numerorum auxilio vti poſſe, qui nudam & apertam rerum veritatem, quoties conſuli poſſunt, exhibere ſolent: quanquam vix dici queat, quam egrè eò tandem totam hanc difficultatem adduxerim; adduxi tamen, nec niſi fallor, omninò perperam.

Secundò moneo. Cum in ſequentibus futurum ſit non rarò, vt radices è numeris irrationalibus ſint eruendæ, quas non facilius ad veras (ſi tamen veræ dici queant, quæ impoſſibiles exiſtunt) admoueas, quàm ope numerorum fractorum, quos decimarum vel decadicos appellant ex eo, quod eorum denominator ſit ſemper vel denarius, vel per denarium productus: eis me maximo cum compendio, cum res feret, vſurum: ſed ita vt deſignatione paulò commodiore vtar, quàm conſuetus ferat modus. Qui iubet vltimam numeri figuram tot accentulis notari, quot con-

tineret figuras nihili ſiue zero denominator, ſi ad longum more ſolito exprimenda fractio foret. Exemplum eſto. Vis numerum hunc $24 \frac{258}{1000}$ in modum decadicorum exprimere; ita haberet, $24258'''$. Vltimâ figurâ tribus accentulis acutis inuſtâ; qui indicent Denominatorem tribus zero præfixâ vnitate conſtare: vel etiam ſignificent tres poſteriores Characteres totius numeri ad fractionem pertinere; reliquas verò duas 24. priores, numerum eſſe integrum; cui fractio adhæret. At quis non videat non ſatis apte tot accentulis vnicam vltimam notam onerari? quis non laboret in aſſignandis vnicuique figuræ antecedenti ſuorum accentuum debitam multitudinem. præſertim cum numeroſior fuerit accentuum copia? quis, niſi ægrè, numerum integrum, (ſi quis præfigatur fracto) ab adhærente fracto diſtinguat? Cenſeo ergo longe commodiùs fore, ſi ipſa prima fracti numeri figura vnico accentu notetur; reliquæ verò deinceps figuræ vno ſemper plus notari cenſeantur. vt in dato exemplo, ita notari debere cenſeo datum numerum $242'58$. figurâ ſcilicet 2 accentu notatâ, reliquis inſequentibus intactis, licet & ipſæ notari cenſeantur accentulis vno ſemper plus, quo magis à primâ notatâ recedunt. Quod ſi fracto numero nullus præfigatur numerus integer, figuráque prima notanda non ad Denominatorem 10 (ſic enim accentu ſuo vnico inureretur) ſed ad 100 vel 1000. pertineret: tunc præfigendæ forent tot figuræ nihili, quot vnâ minus, figuras nihili continet Denominator. Vt, ſi hic numerus $\frac{5}{100}$ vel $\frac{5}{1000}$ notandus foret

foret & in classem decadicorum adsciscendus. Ita exprimeretur o'5, vel o'o5. vel certe tunc tot accentus apponantur figuræ illi, quot exigit Denominator, hoc modo 5'' vel 5'''. Reliquas operationes horum decadicorum non attingo, non enim id ago: moneo tantùm mira compendia ab huius generis numeris præstari: moneo ita plane tractandos, ac tractari solent consueti fracti numeri, solius diuersæ designationis habita ratione. His prænotatis ad rem propiùs accedamus, seruato Propositionum ordine & numero.

PROP. IX. PROBL.

Systema seu figuram vniuersalem construere quæ sola deinceps vsui futura sit.

Paucis superiùs perstricta est systematis huius constructio: quam hic, vt locus exigit, iterum expono paulò distinctius.

Constructio.

Circa lineam A B tanquam axem Parabolæ duæ æquales & similes obuerso situ describantur VVATT, RRBN; quarum A & B sint earum vertices. Diuiso deinde axe A B bifariam in C, duæ sumantur eius particulæ CE,CV æquales: quibus sumantur æquales AH, HI; ita vt tota E V, toti AI sit æqualis. Tum per I,E,& V ordinatæ ducantur ad axem vtrumque productæ ID, IM: EF, ES: VO, VP. Ad hæc describatur circa axem AI, Parabola YIX æqualis & similis Parabolæ MAD eíque obuersa. Præterea duo puncta S & T; *Fig.25.*

item

Figura Vigesimaquinta

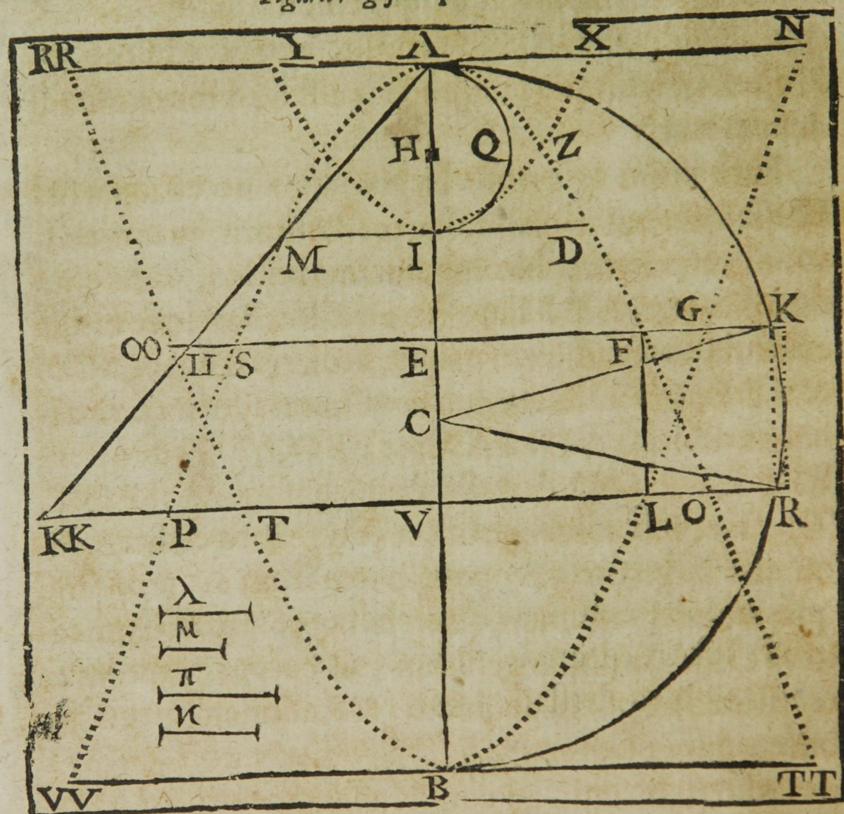


Fig. 25. item F & L lineis rectis iungantur: quæ medio axi E V futuræ ſunt parallelæ & æquales; iungunt enim duas parallelas lineas & æquales E F, V L; eo quod hæ ſint ordinatæ in æqualibus Parabolis ad axem communem, & æqualiter diſtent à verticibus A & B Parabolarum. Quo eodem iure æquales ſunt ordinatæ E G, V O. Hinc ſequitur F L axi A V parallelam, diametrum eſſe Parabolæ, omnes enim lineæ, axi Parabolæ cuiuſuis, parallelæ, ſunt eiuſdem Parabolæ diametri. Centris demùm H & C, ſemicirculi deſcribantur A Q I, A K R B.

Deni

Denique fiat angulus ſemirectus B A K K, ducta AKK quæ ab ordinatis, ſi producantur, ſecetur in I I, & K K. Hoc eſt ſyſtema præter quod vix aliud ad rem noſtram deſideretur.

Ecce enim in primis hypotheſim neceſſariam ad Propoſitionem illam 62. lib. 10. Authoris, quam verſamus: cuius paucis hic memoriam refrico. Sunt ergo duæ diametri A I, F L poſitæ æquales. Sunt per earum extrema ductę ad axem perpendiculares R R A N, M I D; & S E F, P V O. Sunt duo conſtituta ſegmenta æqualia ſibi obuerſa A I D, I A X; & F L O, L F G: duo item F S P L, L T O O F: quibus æqualia ſunt duo S F O T, T L G S, & ſimiliter poſita, vt eorum loco ea liceat adhibere. Ergo iuxta Propoſitionem illam 62. proportio quæ eſt inter rationem, quam habet corpus ex ſegmento A I D in ſe ducto genitum, ad corpus genitum ex ſegmento F L O in ſe ducto: & Rationem quam habet corpus ex ſegmento E L P S vel huic æquali S F O T in ſe ducto ortum, ad corpus ex ſegmento A I M vel huic æquali A I D in ſe ducto genitum; æqualis eſt ex Authoris ſententia proportioni, quæ eſt inter rationes corporum, quæ ex eiſdem ſegmentis in ſe ſubalterne eodem ordine ductis generantur. Iſtud porrò eſt de quo dubitatur, & de quo arbitra conſuli debet Arithmetica; cui vt clariùs cauſa tota proponatur, & breuiùs, omiſſa ductuum illorum tam prolixa commemoratione, quæ ſæpiùs repetenda occurret: Primum corpus ex ſegmento A I D in ſe ducto genitum vocabimus A. Secundum verò ex ſegmento F L O in ſe itidem ducto Fig. 25.

Figura Vigeſimaquinta.

Fig.25. ortum, dicetur B. At tertium, quod ſegmentum S F O I, in ſe ductũ producit charactere C deſignabitur. Quartum denique enaſcens ex ſegmento A I M in ſe ducto, notam D, ſibi vendicabit. Deinde quatuor ſolida ex eiſdem ſegmentis in ſe ſubalterne eodem ordine ductis producta totidem ſignis diſtinguentur E, F, G, H. Porrò Ratio corporum A & B. corporum C & D, &c. Dicetur ratio A B, ratio C D, &c. Deinde proportio inter rationes A B & C D ad ductus ſimplices, ſpectantes; deſignabitur notis K, L: altera verò proportio in-

ter rationes E, F, & GH: quæ ad ſubalternos ductus pertinent; vocabitur MN. Ac tandem proportionalitas inter haſce duas proportiones KL, & MN: dicatur PQ. En collectam harum omnium denominationum lucis, memoriæque cauſa ſynopſim. Conſule etiam Propoſitionem 6. lib. 1.

ſolida ex ductu in ſe vel eorum baſes.	AID / FLO	A Ratio B	K proportio L	P proportionalitas. Q
	SFOT / AIM	C Ratio D		
ſolida ex ductu in ſe ſubalterno, vel eorum baſes.	AID / FLO	E Ratio F	M proportio N	
	SFOT / AIM	G Ratio H		

PROP. X. PROBL.

Ex data linearum aliquot in ſyſtemate deſignatarum quantitate in numeris: Reliquarum quantitatem in numeris colligere.

Solutio.

Hoc eſt ineundarum omnium operationum fundamentum: quæ eò certiores expeditioréſque futuræ ſunt: quo aptiores numeri hic primùm ſuppoſiti fuerint. Vix queam referre quam varios conſuluerim numeros, quam multos animo calamóque verſarim: qui tandem vel in irrationales vel in fractos, abeuntes calculum turbabant meum tædióque cumulabant, licet alioqui ſcopum attingerent. Comperi demum repertum iri aptiſſimos; ſi Quadratum quempiam numerum in duos Quadratos numeros, qui dato exceſſu, etiam Quadrato ſi luberet, ſeſe ſuperarent: cuius ænigmatis ſolutio ope Algebræ expedita eſt: nullos tamen aptiores ſuffecit (ſuffecit autem quam plurimos) quàm qui obuij ſunt & apud Artifices etiam triti ad angulum rectum conſtituendum; nimirum 3.4.5. quorum Quadrati ſunt 9. 16. 25. huiuſmodi, vt maximus 25. in duos 9 & 16 Quadratos diuidatur. horúmque maiorem 16 exceſſu ſuperat Quadrato nempe 9. Nec eos tantùm cum compendio licebit adhibere, ſed etiam cum eodem alios quoſlibet horum æquè multiplices, vt inferiùs conſtabit. Verùm tandem quorſum horum numerorum mentio? En eorum ad ſyſtematis lineas applicatio.

Fig. 25. Eſto igitur AV partium 25. A E 16, A I 9. Erit E V partium 9, & erit æqualis lineæ A I. Erunt præterea V K K 25. E T 16. I M 9. Sunt enim æquales ſingulæ ſingulis lineis V A, E A, I A propter angulos ſemire-

ctos

Figura Vigesimaquinta.

ctos ad basim singulorum triangulorum AVKKAET, AIM. Denique C E vel C V: item H A, vel H I sunt $4\frac{1}{2}$ siue 45. Atque hæ datæ sunt lineæ. Ex datis aliæ eruentur, sed prius statuendum est latus rectum Parabolarum. Quod cum liberæ sit quantitatis prout liberum est varias Parabolas assumere, quarum omnium sint iidem vertices, A & B, idémque axis communis A B vt ex Coroll. 1. Propositionis 6. Huius, colligitur; illud statuo continere particulam vnam earum, in quibus notæ positæ sunt lineæ AV, A E, &c. sic enim, vt

docebit, calculus longè compendiosior futurus est, cum vnitas vel multiplicans vel diuidens numerum quemlibet, nullam in eum inducat mutationem. Posito ergo latere recto 1. ordinatim Applicata V O erit 5.
Fig. 25. E F 4. I D 3. Nam Quadratum ordinatæ V O æquale est rectangulo sub latere recto 1, & abscissâ sagittâ V A 25. per 11. lib. 1. Apoll. Quadratum ergo ordinatæ V O est 25 ac proinde ipsa ordinata, cum sit illius Quadrati radix, erit 5. Par est reliquarum E F, I D ratio.

Restat inuestiganda linea E K siue V R. Cum linea C A siue C K nota sit, nempe partium 20 $\frac{1}{2}$ siue ex lege decadicorum, 20'5. Quadretur hic numerus fiet 4202'5. Ex eo Quadrato dematur Quadratum lineæ C E 45'; quod est 202'5: remanebit Quadratum E K 4000'0 per 47. lib. 1. Eucl. siue expunctâ fractione, quæ hic inutilis est, 400. huius radix Quadrata 20 exhibet quantitatem lineæ E K. Quæ eadem habetur, si B E 25 multiplicet E A 16. & ex producto 400 radix Quadrata 20 eruatur. Est enim K E media proportionalis inter E B, & E A.

Nunc quæro semicirculorũ A Q I, A K B perimetrũ ex datis diametris AI 9 & A B 41. Ex recẽtiorũ Geometrarum peritissimorũ calculo, circuli diametro positâ 1, perimeter polygoni circulo circũscripti laterũ 2560 minor est quam 31'4160: inscripti verò maior quàm 31'4159, ita vt ne vnitate (quæ tercenties millesima parte huius numeri minor est) inter se discrepent hæ duæ circuli perimetri. Si ergo tales sunt circuli A Q I perimetri posita diametro A I, 1, eadem A 1, positâ 9. perimetri erunt

282'7440

282'7440 & 2827431, illa maior verâ, hæc autem verâ minor. quæ habentur multiplicatis perimetris suprà stabilitis per 9 quemadmodum per 9 multiplicatum diameter. Siquidem proportionales esse debent diameter & circumferentia circuli. Semiperimeter ergo AQI maior verâ est 141'3720; verâ minor 141'3715. Ergo etiam eiusdem perimetri quarta pars maior vera erit 70'6860, minor verà 70'6858.

Eadem methodo statuemus perimetrum circuli AKB, cuius diameter est AB 41. atque adeo semiperimetrum ac tandem quartam perimetri partem: quæ futura est huiusmodi 322'0140 maior verâ: at minor verâ 322'0128.

Atque hæ sunt lineæ siue rectæ siue circulares quas necesse fuerat definire hac Propositione. quas in vnum collectas exhibeo, vt hinc facilius peti queant.

VA } 25	EK } 20	Latus rect.---1
VK } 25	VR } 20	Quarta pars
EA } 16	AH—45'	perimetri AQI
ET } 16	AC—205'	70'6860 maior
AI } 9	VO—5	70'6858 minor
EV } 9	EF—4.	Quarta pars
	ID—3	perimetri AKB
		322'0140 maior
		322'0128 minor

PROP. XI. PROBL.

Ex nota linearum superiorum in numeris *Fig. 25.*

quanti

quantitate. Plana quædam in numeris nota exhibere.

Fig.25. In primis occurrit triangulum A I M. ducatur A I 9 in I M 9, & producti 81 semissis 40 5' sumatur.

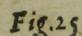
Secundò Trapezium I I E V K K notum fiet si C A 20 5' ducatur in E V 9. vt fiat 184 5'. Nam eius area habetur si duo eius latera V K K 25 & E I I 16, simul addantur; factíque numeri 41, semissis 20 5' ducatur in eius latus E V 9. At C A, vt patet, est semissis linearum AV, A E illis lateribus æqualium.

Tertiò. Rectangulum E L est 36. eius enim area fit latere E F 4 in latus E V 9 ducto.

Quartò noscenda est area portionis Parabolicæ F L O. Quam ita colligemus. Ad lineam V O 5, addatur tertia eius pars 1 $\frac{2}{3}$ vt fiat tota 6 $\frac{2}{3}$. per quam multiplicetur A V 25. Productus hic numerus 166 $\frac{2}{3}$, est area totius Parabolæ P A O: Est enim Parabola P A O sesquitertia trianguli P A O (ductæ concipiantur rectæ A P, A O) per Prop.24. lib... Archim. de Parab. Sed rectangulum, cuius vnum latus est AV altitudo trianguli P A O: alterum verò est trianguli eiusdem semibasis V O aucta sui tertiâ parte, est eiusdem trianguli sesquitertium. Ergo rectangulum & Parabola sunt æqualia, & quidem hoc numero 166 $\frac{2}{3}$ expressa. Eadem methodo habebitur Parabola S A F: semibasi scilicet E F 4 aucta sui parte tertiâ, & facto numero 5 $\frac{1}{3}$ ducto in A E 16, vt fiat 85 $\frac{1}{3}$ rectangulum æquale Parabolæ S A F.

Nunc

Figura Vigesimaquinta.



Nunc verò si Parabola SAF $85\frac{1}{3}$ dematur ex Parabola PAO $166\frac{2}{3}$ remanebit $81\frac{1}{3}$ exprimens aream plani mixti quadrilateri SFOP. A quo si rursum dematur rectangulum SL 72) duplum scilicet rectanguli EL 36) supererit $9\frac{1}{3}$ exprimens duas portiones Parabolicas STP, FLO. Ergo sola FLO erit $4\frac{2}{3}$.

Quintò inuestigo aream semicirculi AQI: ea habetur si diameter AI 9 ducatur in quartam partem perimetri superiùs stabilitam 70'6860 & 70'6858. fiet

enim area totius circuli maior verâ 636'1740. & minor verâ 636'1722. cuius ſemis 318'0870. & 318'0861 erit area ſemicirculi A Q I tam verâ maior, quam minor verâ.

Sexto noſcenda eſt area mixti Quadrilateri EKRV. Id autem vt obtineatur alia quædam priùs determinari debent, ex quibus conſequatur. qualis eſt area totius circuli, deinde ſector C K R. Area quidem circuli obtinetur ducta diametro A B 41 in quartam partem perimetri 322 0140, vel 322'0128 : eritque 13202'5740 & 13202'5248 illa maior, hæc minor verâ.

Sector autem C K R notus fiet, ex noto eius angulo KCR ad centrũ circuli. Ita enim ſe habebit area totius circuli proxime inuenta ad aream ſectoris; vt tota perimeter circuli ad arcũ KR; ſiue vt quatuor anguli recti ad angulũ KCR. Angulus ergo ille inquirendus eſt qui cum ſit duplus anguli EKC trianguli EKC: cuius nota ſunt omnia latera: notus euadet angulus ille, eritque præciſe admodum, G. 12 M. 41. Si ergo duplicetur, vt fiat angulus, G. 25, M. 22. hic erit angulus K C R, ſiue arcus K R. Iam fiat vt totus circulus G, 360 ſiue M. 21600, ad arcum KR. G. 25. M 22. ſiue M. 1522: ita area circuli paulò ante num. 6. inuenta ad 930'2924 vel *Fig.* 25. 930 2890 ſectorem vero maiorem, & minorem. Quod ſi ad hunc ſectorem addatur rectangulum, quod fit ex EK 20, in E C 45' quod eſt, 90: fiet tandem area mixti Quadrilateri E K R V maior verâ 1830 2924, minor verâ 1830'2890. Eſt enim rectangulum CEK 90, æquale duobus triangulis C E K, C V R.

Hactenus

Hactenus inueſtigata plana, ſimul omnia hac tabellâ complector.

Trian. AIM—405′	318′0820
Trapez. EKK——1845′	Semic. AQI
Rectang. EL——36	318′0811
Parab. FLO— $4\frac{2}{3}$	
Eius duplum——$9\frac{1}{3}$	1830′2924
Planum EFOV—$40\frac{2}{3}$	Plan. EKRV.
	1830′2890

PROP. XII. PROBL.

Solida numeris exhibere : quæ ex ſegmentis Parabolicis AID, FLO : & FLPS, AIM in ſe ductis generantur.

Hæc ſolida, ad calcem Propoſitionis 8 vocari iuſſi A, B & C, D. Primum A & vltimum D, quæ æqualia ſunt, vtpote ex æqualibus ſegmentis Parabolicis AID, AIM in ſe ductis orta, facile noſcuntur nam ex dictis Prop. 6. corpora hæc æqualia ſunt ſolido: cuius baſis eſt triangulum AIM 405′, & altitudo Latus rectum 1. Ducatur baſis 405′ in altitudinem 1 fiet ſolidum 405 quæſitum tam A quam D.

Secundò. Solidum B (quod ex ſegmento FLO in ſe ducto gignitur) ita notum fiet. Conſtat ex Prop. 6. corpus ortum ex ductu Quadrilateri EFOV in ſe: æquale eſſe ſolido, cuius baſis ſit Trapezium IIV, & altitudo Latus rectum Trapezium autem ex Prop. antecedente eſt 1845′ Latus verò rectum eſt 1. Ergo ſoli-

Figura Vigesimaquinta.

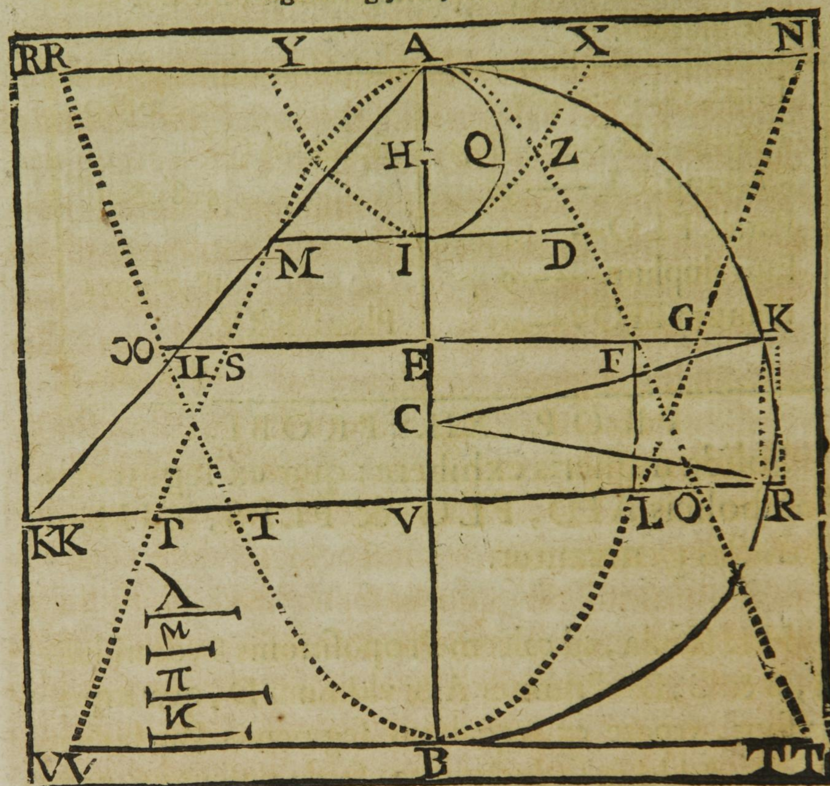


Fig.25. dum ex huiusmodi basi & altitudine constans est 1845'. Sed solidum illud per Prop. 199 de ductibus, in qua Author Propositionem 4. lib. 2. Euclidis ductibus applicat, æquale est solidis huiusmodi. nempe orto ex rectangulo E L in se ducto; orto ex rectangulo ducto bis in segmentum F L O: orto denique ex segmento F L O in se. Solidum autem ex rectangulo E L in se ducto genitum est parallelepipedum, cuius basis est rectangulum ipsum E L, numero 36 expressum: & altitudo E F 4. Si ergo hi duo numeri in se multiplicentur;

centur; fiet 144. ſoliditas corporis illius parallelepipedi.

Deinde ſolidum ex rectangulo E L bis ducto in Parabolam F L O, habetur: ſi altitudo E F 4 ducatur in duplum Parabolæ F L O, quod eſt 9 $\frac{1}{3}$, vt fiat 37 $\frac{1}{3}$.

Addatur hic numerus ad priorem 144, & inde collectus 181 $\frac{1}{3}$, dematur ex 184 5′ ſiue 184 $\frac{3}{6}$ (æquales enim ſunt adhærentes huic numero 184 fractiones) remanebit ſolidum B 3 $\frac{1}{6}$ ex ſegmento F L O in ſe ducto genitum: quod quærebatur.

Corpus denique C ex ductu plani F S P L in ſe genitum, eâdem fere methodo notum euadet. Cum enim planum hoc in duas partes diuidatur à linea E V: erit per citatam Prop. 199. ductuum, ſolidum C quæſitum, æquale ſolido ex ductu rectãguli E L in ſe, genito, quod iam inuentum eſt 144. & ſolido ex ductu in ſe ſegmenti E V P S. quod eſt 184 5′. & denique ſolido, quod fit bis ex rectangulo E L in Quadrilaterum E V P S ducto. Hoc eſt, quod naſcetur ex E F 4 bis ſumptâ, quæ eſt 8; in quadrilaterum E V P S ſiue E F O V 40 $\frac{2}{3}$ ducta. qua multiplicatione producitur numerus 325 $\frac{1}{3}$. Tres ergo hi numeri 144. 184 $\frac{1}{2}$. 325 $\frac{1}{3}$ ſimul addantur colligetur numerus 653 $\frac{5}{6}$ exprimens ſolidum C ex ſegmento S F L P in ſe ducto genitum.

Hæc demum ſolida in vnum collecta ita habent.

A —	40 $\frac{1}{3}$	C —	653 $\frac{5}{6}$
B —	3 $\frac{1}{6}$	D —	40 $\frac{1}{2}$

PROP. XIII. PROBL.

Proportionem Rationum A B, & CD exhibere.

Reducantur in primis proximè expoſiti numeri, quibus fracti adhærent, ad vnicam omnes Denominationem iuxta leges fractorum. Sic ſtabunt Rationes. Sed quia numeri fracti, quorum idem eſt Denominator, eandem ſeruant Rationem inter ſe quam numeratores habere inter ſe, agnoſcuntur. Expungatur communis ille Denominator 6 ab omnibus terminis; & eædem Rationes terminis ſimplicibus conſtantes, iterum hoc modo exhibeantur.

A —	$\frac{243}{6}$	C —	$\frac{3923}{6}$
B —	$\frac{19}{6}$	D —	$\frac{243}{6}$

Iam verò reducantur ad eundem Conſequētem ambæ Rationes. Ad quod ſatis eſt, vt ſoli Antecedentes reperiantur, qui communi Conſequenti debentur; licet ipſe Conſequens communis omittatur. Ipſi enim ſoli duo Antecedentes ad inuicem collati datarum Rationum proportionem exprimeut, vt oſtenſum eſt lib. 1. Prop. 7. Reducentur autem ad eundem Conſequentem Rationes duæ ſuperiores in hoc caſu, in quo Conſequens poſterioris, æqualis eſt prioris Rationis Antecedenti: ſi B 19 ducatur in C 3923, vt fiat 74537. qui diuidatur per A 243, vt fiat

A — 243	C — 3923
B — 19	D — 243

fiat quotiens 3067'36 (vtor decadicis vt præcisior habeatur quotiens, faciliúsque exprimatur fractio post diuisionem reliqua.) Dico terminum A 243 tanquam Antecedentem, ad quotiẽtem proximè inuentum 3067'36 tanquam ad Consequentem, collatum, exprimere proportionem duarum Rationum A B & C D. Cuius terminos characteribus K, & L designari monui Propos. 9. huius ad calcem.

Hac autem arte, quam hic adhibui, rectè inueniri terminos proportionis inter duas Rationes AB, & CD intercedentis, sic ostendo. Cum primus terminus A & vltimus D ponantur æquales, & in se mutuo duci debeant, vt reperiatur Consequens communis duabus Rationibus A B, & C D. Fiet ex ea multiplicatione numerus Quadratus primi termini A. qui futurus esset Antecedens proportionis quæsitæ, cuius Consequens, foret numerus ex multiplicatione B in C progenitus. Quod si huiusmodi termini proportionis per eundem numerum diuidantur; alij habebuntur termini eiusdem proportionis. Numeri enim duo vel plures, sicut, si per eundem numerum multiplicentur, numeros producunt eiusdem cum ipsis Rationis. Ita eiusdem cum ipsis Rationis numeros producent, si per eundem numerum diuidantur. Quare si Quadratus numerus termini A, & productus ex multiplicatione termini B in C, diuidantur per eundem terminum A. Quotientes ita erunt inter se vt numeri diuisi. Est autem A quotiens, si eius Quadratum per A diuidatur. Ergo A ita se habet ad quotientem diuisionis numeri ex B in C producti,

ducti, cùm idem per A diuiditur: ac se habet Quadratus radicis A ad productum numerum ex B in C. Sed Quadratus radicis A, & productus ex B in C exprimunt proportionem Rationum AB, CD. Ergo eandem etiam exprimen tipse numerus A, & quotiens factus ex diuisione producti ex B in C per eundem numerum A. Hæc ergo esto datarum Rationum AB, CD quæsita proportio. K 243 Antecedens, L 306'736 Consequens: vel terminis ad eandem Denominationem reductis (terminus enim L fractus est, & more decadicorum designatus) & deinde Denominatione extincta multiplicato K 243 per 1000. Sic stabit in integris quæsita proportio.

K 243000	vel in	K—30375	
L 306736	minimis	L—38342	

PROP. XIV. PROBL.

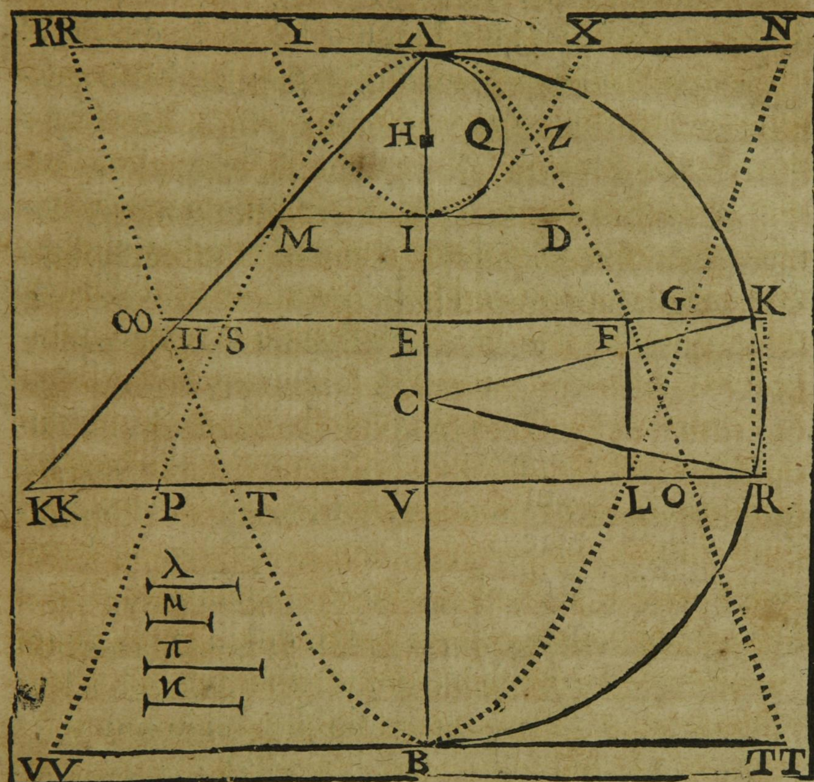
Fig. 25. Cognoscenda sint in numeris solida, quæ ex segmentis Parabolicis AID, FLO: & FLPS, AIM in se subalterne ductis oriuntur.

Quod Prop. 12. præstitum est circa eadem Plana in se directe ducta: idem nunc absoluendum est quando in se subalterne ducuntur.

Primo ergo loco. primum & vltimum solidum ex æqualibus segmentis Parabolicis AID, AIM genita (quæ E & H vocãda veniunt ex Prop. 9.) nota fiunt,) si

Latus

Figura Vigesimaquinta



Latus rectum 1 Parabolarum multiplicet aream semicirculi AQI: per Prop. 5. huius quæ multiplicatio aream illam non immutat. Ergo corpora illa E & H sunt 318′0870 maius vero; vel 318′0861 vero minus ex Prop. 11.

Secundò Solidum F, quod oritur ex segmento FLO in se subalterne ducto, innotescet: si ex solido, cuius basis est mixtum Quadrilaterum circulare EKRV & altitudo Latus rectum 1: & est ipsa baseos quantitas immutata suprà Prop. 11. definita his terminis maior

verâ 1830'2924. At minor verâ 1830'2896: dematur ſolidum quod fit ex Rectangulo E L in ſe ducto, & quod fit ex ductu eiuſdem Rectanguli E L bis in planum F L O. Hæc autem ſolida duo ſimul iam ſupra Prop. 12. inuenta ſunt 181 $\frac{1}{3}$. vel, reductâ hac fractione $\frac{1}{3}$ ad decimas, ad eandem ſcilicet denominationem cum numero, vnde fieri ſubtractio debet, 1813'3333 facta verò huius numeri ſubtractione ex illo vel maiore vero vel minore: remanebit ſolidum F vel maius vero 16'9591, vel vero minus 16'9563.

Fig. 25. Hic in mentem fortaſſe veniret dubitandi, ne ductuum diuerſitas, quæ in hac Propoſitione & Propoſitione 12 citatæ obſeruatur; cum hic ductus ſubalternus, illic verò ſimplex adhibeatur: aliquid etiam diuerſitatis inuehat in Applicationem Propoſitionis 4. lib. 2. Eucl. quam Geometra demonſtrat Prop. 199. ductuum vt ſupra Prop. 12. retuli. Verum nihil diſcriminis in hoc caſu obſeruari poteſt niſi in ſolo ſitu ſolidorum duorum, quæ complementorum locum referunt Propoſitionis illius Euclidis citatæ. Semel enim Rectangulum E L duci debet in planum F L O, ſemel item in planum L F G, priori quidem obuerſum ſed ei æquale; vt vnâ cum ſolido ex F L O in ſe ſubalterne, hoc eſt, in obuerſum planum L F G ducto, componatur totum ſolidum ex toto Plano E F O V in ſe ſubalterne ducto formatum. Ita vt tota diuerſitas quantitatis ſolidorum duorum, quæ generat planum E F O V, dum in ſe directe, & in ſe ſubalterne ducitur, ſumi debeat penes particulam F L O: licet quoad ſitum diſcrimen etiam

reperiatur

Figura Vigesimaquinta.

reperiatur in complementis vt dixi, nullum verò nec in ſitu nec in quantitate contingit in ductu Rectanguli EL, vt patet. Atque hæc obſeruatio locum habet etiam in Paragrapho ſequenti.

Tertiò. Inquirendum ſupereſt Solidum G; quod ſcilicet oritur ex ductu plani FSPL, ſiue ei ſimilis & æqualis SFOT, ſubalterno in ſe, vel, in planum obuerſum SGLT. Illud ergo notum euadet in hunc modum. Cum planum SFOT ſecetur in duas partes à linea EV: ſi ducatur rectangulum ET ſiue EL in ſe; *Fig. 25.*

fiet ſolidum 144. ſuprà Prop. 12. iam inuentum: ſi rurſus idem rectangulum E L ducatur bis in planum E F O V. 40. $\frac{2}{3}$ ex Prop. 11. id eſt, ſi E F 4. bis ſiue 8, ducatur in 40 $\frac{2}{3}$ vt fiat 325 $\frac{1}{3}$. Si deinde addantur hi duo numeri 144 & 325 $\frac{1}{3}$ vt fiat 469 $\frac{1}{3}$. Si denique hic numerus addatur ad ſolidum, quod fit ex ductu ſubalterno plani E F O V quod per Prop. 5. æquale eſt ſolido, cuius baſis eſt planum E K R V, altitudo verò Latus rectum Parabolarum: habebitur ſolidum quæſitum ex illis partialibus compoſitum: Poſtremum verò hoc ſolidum, cum altitudo eius ſit Latus rectum 1, erit ipſa baſis E K R V ſuprà definita Prop. 11. vera maior 1830'2924 & verâ minor 1830'2896 immutata, huic ergo numero addatur numerus 469 $\frac{1}{3}$ ſiue reducta fractione $\frac{1}{3}$, ad decimas 4693'3333. fiet per hanc additionem 6523'6257 vel 65236229 ſolidum quæſitum, illud maius vero, hoc autem minus.

Quatuor ergo ſolida illa, tota hac Propoſitione inueſtigata, ex ductibus ſubalternis orta hac ſynopſi exponantur.

E	318'0870 mai. 318'0861. min.	G	6523'6257 mai. 6523'6229 min.
F	16'9591 mai. 16'9563 min.	H	318'0870 mai. 318'0861 min.

PROP.

PROP. XV. PROBL.

Inuestigetur Proportio Rationum quæ inter solida E, F; & G, H. proxime Inuenta, intercedit.

Hactenus solida illa quatuor, inter quorum Rationes Proportio hic proponitur inuestiganda: duobus semper numeris expressi, maiore vero, & vero minore, prout constituta est area circulorum, è quibus pendent hæc solida; maior verâ, vel minor verâ. Quod quo consilio à me factum fuerit, infra patebit: illud interim etiamnum obseruo: & prius inquiro proportionem, quæ est inter Rationes horum solidorum, cùm veris maiora supponuntur; tum deinceps eadem proportio inquiretur solidis iisdem minoribus veris, suppositis. Repetantur ergo termini veris maiores, vt habet hoc schema: in quo expungitur fractio omnium,

E—3180870	G—65236257
F—169591	H—3180870

delecto accentu quia idem est in omnibus fractionis Denominator: vnde fit, vt sæpiùs dictum est, vt ipsi numeratores inter se eandem obseruent Rationem quam ipsi fracti inter se prius obseruabant. Quæratur itaque Consequens vtrique Rationi E F, G H communis, vel potiùs vt aliàs monui, quærantur soli Antecedentes E & G, qui Consequenti communi debentur, licet ipse omittatur. Erunt hi duo Antecedentes, E quidem idem; nempe 3180870 si methodus vsurpata & demonstrata ad Prop. 13. adhibeatur. At G erit 3478131. Qui termini

Proportionem exponunt, quæ eſt inter Rationem E F, & Rationem G H. quique deſignari debent ex præſcripto Propoſitionis 9. characteribus M & N. Atque ea eſt Proportio, quæ oritur ex terminis verò maioribus
Fig.25. aſſumptis. Quod ſi verò minores aſſumantur, haud aliter proportio reperietur: ſint enim termini verò minores ſuprà exhibiti vt habet hoc ſchema. Et F ducatur in G, productúſque diuidatur per E vt fiat quotiens 3477565 loco Antecedentis G ad quem velut ad Conſequentem referatur Antecedens E.

E-3180861	G 65236229
F- 169563	H 3180861

Expriment hi numeri, qui M & N dici debent, Proportionem inter Rationes ſolidorum E, F & G, H. poſitis terminis verò minoribus. En iam ſchema in quo vtraque Proportio exhibetur, vt

M-3180870	Ex terminis vero maioribus	M-3180861	Ex vero minoribus
N-3478131		N 3477565	

earum diſcrimen, dum ſimul ambæ opponuntur, clariùs eluceſcat. Nec dum tamen ſatis apertè dignoſcetur, donec vterque Antecedens M in alium mutetur, cui communis Conſequens congruat: hoc eſt, donec termini reperiantur Proportionalitatis, duplicis huius Proportionis M N, M N. qui habebuntur primo termino M ducto in quartum N, vt fiat Antecedens: & ducto ſecundo termino N in tertium M, vt fiat Conſequens ſunt autem huiuſmodi, quales hic adſcribo.

Ex

Antec.	11061682181550
Conſeq.	11063451250791

Ex quibus patet minorem eſſe rationem ex terminis verò maioribus ortum, ratione orta ex terminis verò minoribus. Vera ergo ratio ex terminis veris profecta inter hanc vtráque interiaceret. Quod maximè obſeruatum velim. Atque hactenus expoſui Proportionem quæ hic quærebatur.

PROP. XVI. THEOR.

Reſpuit Geometria, coniunctiſſimæ ſuæ ſororis Arithmetices apertiſſimis argumentis perſuaſa clariſſimi Alumni ſui nouam Circuli Quadraturam.

Demonſtratio.

Hic in primis conſulatur Propoſitio mea 8. in qua retuli Propoſitionem 77. lib. 10. Geometræ in qua ſupponit probatum euidenter per Propoſitionem ſuam 62. (hæc eſt propoſitio mea 7.) eſſe eandem Proportionem inter Rationes AB & CD: quæ eſt inter Rationes EF & GH. Quas Proportiones voco KL & MN. id eſt, eandem eſſe proportionalitatem PQ. (hic conſuli omnino debet Propoſitio 9. vt horum characterum, quibus breuitatis & lucis gratia vti cogor, memoria refricetur) inter has duas Proportiones, atque adeo Proportionalitatis huius terminos Antecedentem P & conſequentem Q æquales eſſe. Iſtud porrò an verum ſit; tabulæ, quas hactenus paraui, prolatæ

latæ apertum facient. Exhibeantur igitur. Ac primùm producatur Proportio K L quam Prop. 13. numeris accuratissimis expressi huiusmodi. K-30375. L 38342. Afferatur deinde in medium Proportio M N quæ duobus diuersis terminis exprimitur, provt veris maiores vel minores assumi possunt. Nunc primùm proponantur veris maiores. M est 3180870. & N 3478131. Componãtur in vnum schema ambæ Proportiones hoc modo.

K--30375	M-3180870
L-- 38342	N- 3478131

Si ergo hæ duæ Proportiones siue Rationum A B, C D & E F, G H Rationes, sunt æquales: Idem debet esse vtriusque Proportionis Denominator vel, quod eodem redit; cum æquales ponantur proportiones K L & M N. Proportionales debent esse earum termini. Atque adeò per Prop. 19. lib. 7. Eucl. Idem numerus fieri debet, si ducatur K primus, in quartum N; qui fit ducto L secundo in M tertium. Ineatur huiusmodi multiplicatio: vt habeantur termini P, Q Proportionalitatis. Hi sunt quos refert hoc schema.

P— 105648229125
Q—121960917540

Ecce quanta inter eos inæqualitas sese offert: Ex qua, inæqualitas duarum proportionum propositarum euidentissimè concluditur.

Quod si terminos veris minores in medium adducamus, vix minor sese prodet dissimilitudo, siue inæqualitas proportionum earumdem K L, & M N. Componantur ambæ in hoc schemate.

Debet

K--30375	M---3180861
L--38342	N--- 3477565

Debet ergo idem numerus produci ex multiplicatione mutua terminorum K, N, & terminorum L, M, vt ante oſtendi. hoc eſt, termini Proportionalitatis P & Q, æquales eſſe debent. Sunt autem huiuſmodi.

P--105631067250
Q--121960572462

Cum ergo tanta inæqualitas obſeruetur inter terminos P & Q Proportionalitatis Proportionum K L, & M N, ſiue ſumantur termini Proportionis M, N veris maiores, aut veris minores (termini enim K, L prioris Proportionis veri ipſi ſunt, & accuratiſſimi.) Quis Geometriæ alumnus non in dubium reuocet Propoſitionem illam 62. ſæpiùs citatam: quâ aſſeruntur Proportiones K L & M N, Rationum A B, C D: & Rationum E F, G H, æquales eſſe: atque adeò iure non agnoſcat tanquam abſolutam Quadraturam nouam, quæ tota huic Propoſitioni nititur.

Atque iſtud ſolum è Logiſtica deductum ratiocinium, nouum hunc circuli Quadrandi modum omni vitio omninò non carere ſatis euidenter oſtendit. Verumtamen cum iſtud vnum ſit totius huius diſcuſſionis caput, licet ſatis fusè ſingula expoſita fuerint, ita vt non numeros modò ex calculo deductos: ſed ipſam etiam totius putationis ſeriem exhibuerim; vt, ſi lubeat, totus ipſe calculus à Logiſta non omnino rudi leuiſſimâ operâ poſſit iniri & probari: in eo exponen-

do paulò diutiùs immorandum videtur: ac in primis difficultati cuidam prima ſpecie ſatis graui occurrendum: ea eſt huiuſmodi.

Obiiciet non nemo mirum videri non debere, ſi inæqualitas aliqua deprehendatur in numeris ſuperioribus proportiones KL, MN exponentibus: ac proinde eas inæquales eſſe indicantibus. Cum enim Rationes EF, GH corporum ex ductu ſubalterno productorum, atque adeo earum Rationum proportio MN; non niſi ex circuli perimetro eiúſque area: quas veris ac præciſis numeris exprimi nondum contigit; exprimantur, vt ex Propoſitionibus 14. 15. & 16 conſtat. Cum, vt ibidem videre eſt, ſinuum numeri, qui omninò præciſi eſſe nequeunt, adhibeantur ad harum Rationum inueſtigationem, ac determinationem: quî fieri poteſt, vt ipſa proportionalitas, P, Q duarum proportionum KL, & MN habitudinem exponens, æqualibus numeris conſtet, qui æquales proportiones illas KL, MN demonſtrent; licet reuera æquales Geometrice ipſæ ſint: Imò inæquales eſſe huiuſmodi terminos P & Q proportionalitatis neceſſe eſt. Nam proportio KL, quæ ad Rationes AB, CD corporum ex ductu ſimplici genitorum pertinet: veris accuratíſque terminis conſtat. Contra verò proportio MN ex terminis non omninò veris ſed ad veros proximè tantùm accedentibus, vt paulò ante dictum eſt, proficiſcitur: diſcrimen ergo aliquod induci neceſſe eſt in numeros P, Q proportionalitatis; quamuis, ſi terminis exprimatur continuæ quantitatis, abſolutiſſima ſeſe prodat æqualitas.

Ad

Ad hanc difficultatem respondetur, diffitendum omninò non esse inæqualitatem quandam in terminos P, Q Proportionalitatis, inuehi ex terminis non omninò præcisis suppositis, vnde ipsa constituitur: id enim euidenter probat allatum argumentum. Ea tamen admittenda non est inæqualitas, quam in terminis Proportionalitatis P Q obseruare licet. Hæc enim nullo modo referri potest ad numeros, qui non veri sed veris tantùm proximi supponuntur initio: cum in ipsis primis figuris numerorum P & Q sese prodat: ad quas pertingere non potest tantilla à vero discrepantia in extremis ipsis tantorum numerorum figuris supposita, quæque etiam in ipsis vnitatem integram adæquare non possit; quamuis vnitas vt Prop. 10. monui, minor sit parte ter centies millesimâ positorum numerorum : nec verò in decursu calculi tot occurrunt ineundæ operationes, quæ particulam illam ita multiplicent, vt numeros peruadere possit immensos, nec paucioribus quàm duodecim figuris constantes; & mutationem siue inæqualitatem gignere in primis ipsis eorum figuris: Quod vestigia relegendo totius putationis declarari faciliùs potest, quam breuius: itavt huic operæ minimè necessariæ supersedeam. certóque statuam inæquales omnino esse Proportiones ipsas K L, M N, vt arguit earum Proportionalitas P Q terminis constans inæqualibus ab ipsis primis eorum figuris, quarum vtpote summi valoris, maxima habenda est Ratio: Esto in posteriores figuras, quæ, vt minimæ quantitatis, ad priores collatæ, contemni & omitti

 possent:

poſſent: aliqua inæqualitas conſequi poſſit ex diſcrimine numerorum à veris, ſuppoſito.

Hanc reſponſionem, latámque ſententiam in circuli nouam hanc Quadraturam, apertiſſimè confirmat initus à me calculus ſuperior; initus ſi quidem de induſtria, ita eſt; vt duplicem ſemper operationem inſtituerim, quarum altera ad perimetrum circuli verâ maiorem, altera ad verâ minorem ſpectaret: itavt certum ſit verum ipſum terminum inter vtrumque verſari. Cum igitur tandem neceſſarias putationes eò adduxi, vt ſtabilita ſit vtraque Proportionalitas P Q, tum quæ ex termino maiore, tum quæ ex minore, vero, deducitur: neceſſarium eſt vt alterutro Conſequente Q Proportionalitatis, conſtituto (cuius vtriuſque Conſequentis Q figuræ primæ ad ſextum vſque ſunt æquales) ipſe verus Antecedens, ſi haberi contingeret; inter vtrumque hunc Antecedentem 105648, &c. Qui ex termino maiore, & 105631, &c. Qui ex termino minore collectus eſt; contineatur: Et quia quatuor priores figuræ vtriuſque huius Antecedentis ſunt æquales; etiam his æquales forent ſaltem quatuor priores figuræ veri Antecedentis: Atque adeò eædem inæquales forent quatuor primis figuris Conſequentis Q. quemadmodum illis ſunt inæquales quatuor figuræ duplicis huius Antecedentis: Eſto reliquarum inſequentium tanquam minimi momenti nulla haberetur ratio ſiue æquales fuerint ſiue inæquales.

Ad extremum vt ſole clariùs pateat hanc inæqualitatem terminorum P & Q Proportionalitatis non ex

numeris

numeris à verò alienis, ſuppoſitis oriri, ſed ad inæqualitatem ipſarum proportionum K L & M N acceptam referri debere: attendantur tum Antecedentes duo, tum duo Conſequentes proportionalitatis vtriuſque P Q. Nunquid non æquales ſunt duo Antecedentes P ad quartam vſque numerorum figuram: duo verò Conſequentes Q, etiam ad ſextam, æqualitatem retinent? & tamen vterque Antecedens, & Conſequens vterque ortum habet à duplici circuli perimetro ſuppoſita, quarum vna maior eſt verâ, altera minor. Cur ergo termini vtriuſque Proportionalitatis P Q, qui æquales eſſe deberent, poſitis æqualibus proportionibus K L, M N, inæquales ſunt, ſi tota eorum inæqualitas ex eodem fonte emanaret: ex quo deriuatur tota diuerſitas duorum Antecedentium inter ſe, ſicut & duorum Conſequentium: qui licet aliquam inæqualitatem patiantur; ea tamen exigua eſt, & minimi momenti, & ad primas figuras terminorum minimè pertingens; ſed extremas tantùm occupans: Et ea ſanè tota eſt, quam generant termini perimetrorum verò maiores, veróque minores ſuppoſiti: quam etiam obſeruare vtriuſque proportionalitatis Antecedentem & Conſequentem fatendum foret, ſi ea ſolùm radix foret diſcriminis intercedentis inter eos. Sed aliunde, cum tam diuerſum ſit, illud emanare conſtat, ex diuerſis ſcilicet proportionibus Rationum A B, C D; & E F, G H. Vt hactenus inita putatio demonſtrauit. Et in poſterum demonſtratura eſt euidentius: neque enim par eſt tanti momenti caput vnico examini (licet vni-

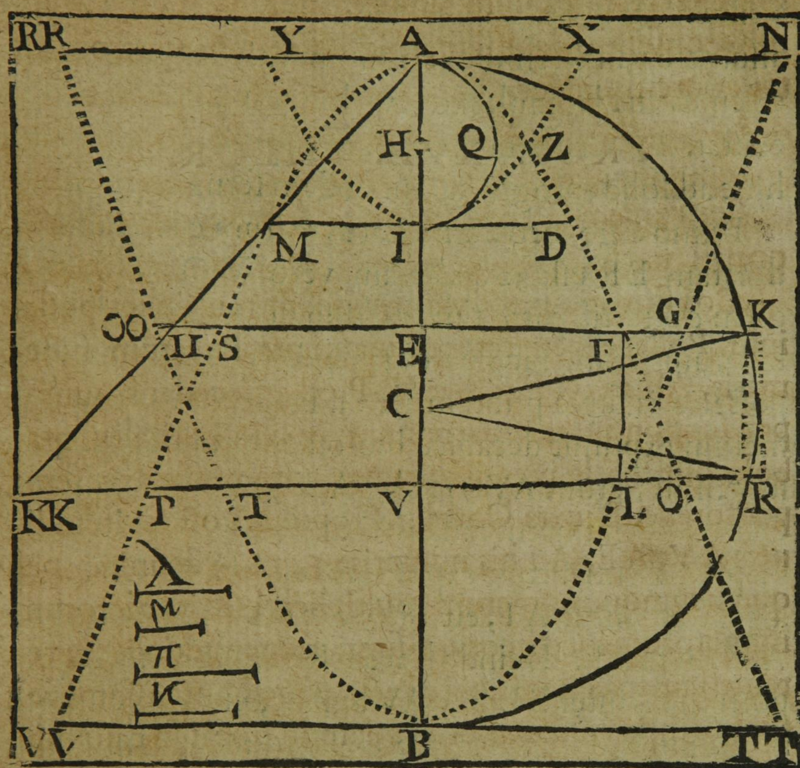
cum sufficiat) subiecisse. Sed accedat necesse est, aliquot præterea casuum similium testimonium; vt eorum consensus, latæ sententiæ æquitatem apud omnes testatiorem præstet.

PROP. XVII. THEOR.

Sententiæ Propositione Antecedenti latæ confirmatio.

Fig. 25. Confirmatio hæc, viâ per quàm multiplici posset iniri. Posset eâdem retentâ quantitate linearum systematis, AV 25. A E 16, &c. Vt Prop. antecedenti assumptæ sunt, mutari latus rectum, & sic aliæ & aliæ parabolæ possent delineari, quarum communis axis semper foret A B iuxta Coroll. 1. Propos. 6. Possent item lineæ A V, A E, A I his numeris 25, 16, 9 definitæ, per quemcumque numerum multiplicari; & ita dictorum numerorum loco, eorum sumi æquemultiplices: retento tamen eodem latere recto; quod ante assumebatur, nempe vnitate. Posset etiam in hoc ipso casu mutari latus rectum. Quod si omnibus his diuersis initis viis (quarum plurimas, vt mihi constaret veritas, quàm tanti Geometræ authoritas sola mihi faciebat dubiam) eò semper deueniatur; vt proportiones Rationum superiorum A B, C D: & E F, G H; inæqualitatem aliquam subeant, id est; termini Proportionalitatis earum, qui sunt P & Q, inæquales tandem absolutis operationibus sese prodant: de earum inæqualitate, quæ Quadraturam nouam funditus concutit, iure nemo possit dubitare. Omitto tamen omnes hinc petitas

Figura Vigesimaquinta.



assertionis meæ confirmationes, vt aliam afferam, quæ & lucis plurimùm calculo præcedenti affundet: & veritatem è tenebris, si necdum satis discussæ sunt, sole clariorem educet contemplandam.

Dum varias in eo numerorum rationes, frequens & constans me docuit experientia, Proportionum, de quibus tota est quæstio, inæqualitatem siue dissimilitudinem eò maiorem semper se prodere cæteris paribus, quo longior axis A B Parabolarum statuitur, quóve (quod inde consequitur) ordinatim Applicatæ *Fig. 25.*

EF,

EF, VO medium ſpatium ſemper occupantes, à verticibus A & B longiùs recedunt. Statui igitur eaſdem aſſumere paulò remotiùs, tantum enim abeſt, vt inde calculus euadat moleſtior, vt longe facilior & tutior exiſtat. A lineis iuxta methodum ſuperiorem, ad Plana; hinc ad ſolida progrediamur eodem ſeruato ſyſtemate.

Fig.25. Primo ergo loco ſtatuo Latus rectum eſſe 1. tum ordinatam EF eſſe 30, alteram verò VO 30'3 (volo enim eas tertiâ parte ſine fractione conſtare, ad Parabolarum aream faciliùs obtinendam) ita vt exceſſus poſterioris ſupra priorem ſit tantùm $\frac{3}{10}$: quem numerum exprimit decadicè hic terminus 3'. Ex his ita ſuppoſitis; erunt AV 9180'9, AE 900, illa enim eſt Quadratus numerus radicis VO; hæc verò radicis EF, vt præcedenti Prop. expoſitum eſt. Ergo EV, cui æqualis ponitur AI, eſt 180'9 exceſſus nimirum lineæ AV ſupra AE. Deinde linea EK, cum ſit media proportionalis inter BE ſiue AV & AE, erit 909 eſt enim rationalis & rationali radice conſtat; nam Quadratus numerus AV, Quadratum numerum AE multiplicans Quadratum EK producit per 1.lib.9.Eucl. Denique linea circularis ſiue Perimeter tota circuli AQI erit 568'315440 maior verâ (eam vnicam breuitatis cauſa nunc adhibeo) deducta ex ratione diametri 1, ad perimetrum 3'14160, iuxta calculum præciſiorem à Peritis Geometris initum. Ergo octaua illius perimetri pars, qua ſola egebo, eſt 71'039430. Quoad verò Perimetrum circuli AKB maioris, hic eſt minime neceſſaria, vt infra conſtabit. Ita ergo habet linearum quantitas in ſyſtemate contentarum.

Secundò

Figura Vigesimaquinta.

VA VKK	9180'9	EK 909	Latus rect. I.
EA EII	909	EC 90'45	Octaua pars
AI EV	180'9	CA 90'945	Perimetri circuli A QI
		EF 30	71'03943
		VO 303'	

Secundò, ex his Plana eruenda sunt. Et primò triangulum A I M ex linea A I 180'9, in semissem I M Fig.

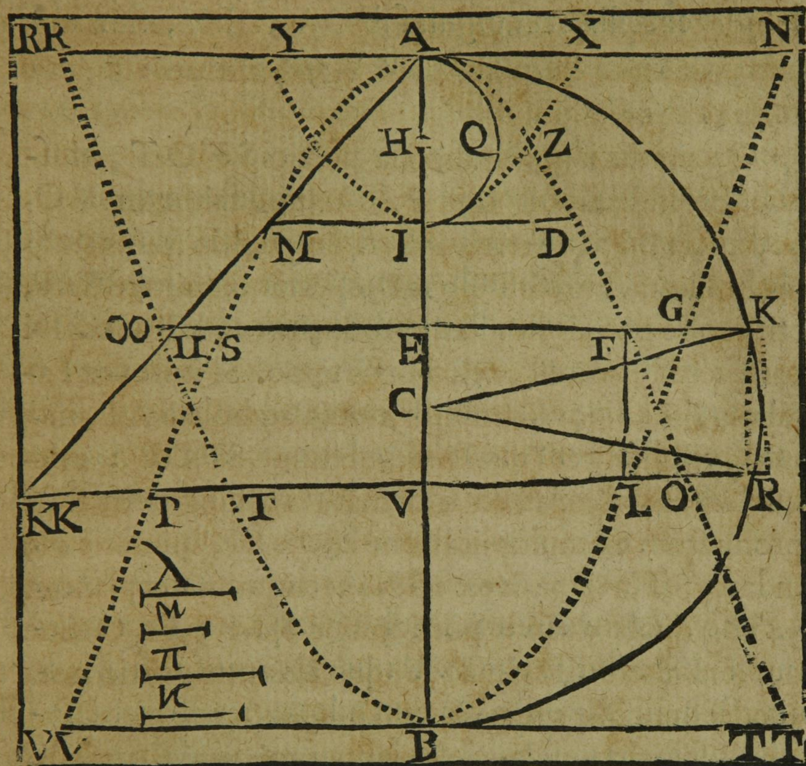
vel AI 90'45 ductâ genitum, est 1636'24. Trapezium deinde IIEVKK ex lineâ CA in EV ductâ ortum, vt supra Prop. 11. num. 2. expositum est, erit 164446'2405.

Fig.25. Quæratur iam Parabolica portio SFOT, eiusque Partes. Parabola tota PAO producitur ex VO, 303' aucta sui parte tertia, id est ex 404' in VA 9180'9 multiplicata. Ergo est 370908'36. Parabola autem SAF, erit 36000 nam is numerus producitur ex EF auctâ sui parte tertiâ, hoc est, ex 40 in EA 900. Si igitur ex Parabola PAO nota, dematur nota Parabola SAF, notum vtique fiet planum mixtum SFOP: eritque 10908'36. A quo si dematur rectangulum SL, productum ex multiplicatione lateris SF, quod est 60, in latus ST, 180'9; & est 10854': reliquum fiet planum 54'36 æquale duabus portionibus STP, FLO siue duplum alterutrius; ipsaque adeò alterutra portio nota euadet; eritque 27'18.

Fig.25. Noscendum deinde est planum mixtum Quadrilaterum EKRV. cui operæ non satis tutò inseruiet methodus præcedenti Prop. assumpta eò quod angulus KCR sectoris euadat acutissimus; quales anguli minus exactè per sinus solent obtineri. Hac ergo ratione breuiori tutiorique planum illud poterit definiri. Inueniatur area rectanguli, quod fit ex latere EV in latus EK multiplicato: quæ latera cum nota facta sint; notum exhibebunt rectangulum illud, eiusque quantitas, hæc erit, 164438'1. Quod si à rectangulo genito à latere CA & latere EV, quod paulò ante definitum

est

Figura Vigesimaquinta



est 164446'2405, dematur huiusmodi rectangulum VEK: remanebit excessus vnius supra alterum 8'1405. Certum autem est excessum, quo mixtum planum EKRV superat Rectangulum VEK paulo maius esse semisse huius numeri 8'1405. Nam ducta rectâ KR, segmentum Circuli ab eadem abscissum paulò maius est, quam triangulum Isosceles supra basim KR excitatum intra idem segmentum, segmentum enim triangulum hoc modo sibi inscriptum superat quantitate duorum minorum segmentorum ab vtroque *Fig.25.*

trianguli latere abſciſſorum. At triangulum eſt dimidia pars exceſſus rectanguli ſub C A & E V, ſiue circumſcripti plano mixto E K R V, ſupra rectangulum V E K, quod eidem plano mixto inſcribitur. Cum igitur exceſſus illius 8'1405 rectanguli circumſcripti ſupra inſcriptum dimidia pars, ſit 4'0702, quantitatem trianguli ſegmento K R inſcripti exprimens: ſi quid plus augeatur, hoc modo, 4'1, poſita ſcilicet vnitate loco illius O, primam figuram 4 proximè inſequentis; cum tertia figura 7 prope abſit à 10; vix aberrabitur à vera quantitate plani mixti: quod ex his ſuppoſitis, erit 164442'2. Tantum igitur eſto Planum illud mixtum E K R V.

g.25. Denique area ſemicirculi A Q I erit 1285'10328870. quæ fit ducta diametro A I 180'9 in octauam partem perimetri totius circuli A Q I: Quæ pars octaua ſuperius definita fuit 71'03943. Atque hæc ſunt Plana omnia, ex quibus mox ſolida eruenda ſunt poſtquam huiuſmodi Plana vnũ ſub aſpectũ expoſuero hoc modo.

Triang. A I M—	1636'24	Semicirculus
Trapez. EKK——	164446'24	A Q I
Rectang. E L—	5427'	1285'10
Dupla portio FLO·	54'36	Planum E K R V
Planum EFOV--	5454'18	164442'2
Eius duplum—	10908'36	

Tertiò denique corpora, quorum Rationes perpenduntur, definienda ſunt.

Primum

Primum eſt corpus A ortum ex ſegmento AID in ſe ducto. quod æquale eſt Priſmati, cuius baſis eſt triangulum AIM, & altitudo Latus rectum, quod cum ſit vnitas. ipſum ſolidum A, erit ipſum triangulum AIM 1636'24.

Secundum eſt ſolidum B, ortum ex ſegmento FLO in ſe ducto. Quod ita notum euadet. Ad duplum portionis FLO 54'36 addatur rectangulum EL 5427', vt fiat ex ea additione 5481'36, hic numerus ducatur in EF 30. fiet 164440'80. qui ſi dematur ex Trapezio EKK, reliquum fiet quæſitum ſolidum B 5'4405. huius praxis ratio ſupra declarata fuit in ſimili caſu præcedentis Propoſitionis: hic tamen compendioſius abſoluta, iunctum ſcilicet eſt rectangulum EL cum duplo plani FLO: & facta hinc area ducta eſt in altitudinem EF; cum illic ſigillatim rectangulum EL in ſe duceretur, & deinde idem duceretur in duplum planum FLO. Sed per Prop. 1. lib. 2. Eucl. idem gignitur vtroque operandi modo. *Fig. 25.*

Tertium ſolidum eſt C ortum ex plano SFOT in ſe ducto. Illud colligemus, ſi ad planum SFOP 10908'36 addatur rectangulum EL 5427', vt fiat 16335'36. Hic verò ducatur in EF 30, vt fiat 490060'80: qui ad Trapezium EKK 164446'24 additus dabit quæſitum ſolidum C 654507'04. Ratio huiuſmodi ſolidum C inueniendi, clara eſt ex Prop. 12. Huius. In qua eſt huiuſmodi corpus C definitum, ibi enim oſtenſum eſt corpus C ex plano SFOT in ſe ducto genitum, æquale eſſe corpori, quod tribus ſolidis conſtat, nimirum ei *Fig. 25.*

Figura Vigesimaquinta

Fig. 25. quod fit ex plano E F O V in ſe (quod eſt æquale Priſmati, cuius altitudo eſt latus rectum, baſis verò Trapezium E K K ſiue rectangulum ei æquale ſub V E, & C A vel C K ex Prop. 11. num. 2.) item ei quod fit ex rectangulo S V vel E L in ſe; ac denique ei quod fit ex rectangulo E L ducto in planum E F O V bis hoc eſt, in planum S F O P. Sed ſi addatur rectangulum E L ad illud planum S F O P. Et hinc collectus numerus, qui baſis eſt ſolidi, ducatur in altitudinem E L. per applicationem Propoſitionis 1. lib. 2. Eucl. ad ductûs, idem

gigni

gigni debet numerus, ac gigneretur si singulæ partes, rectangulum scilicet E L, & planum S F O P, separatim ducerentur in E L, productique partiales numeri adderentur. Si ergo hoc vtrouis modo genitus numerus addatur ad solidum ex E F O V in se ducto ortum; quod in nostro casu, in quo latus rectum siue altitudo est vnitas, est ipsa basis immutata, rectangulum scilicet sub V E, C A: habebitur solidum C. Qua eadem praxi paulò post venabimur solidum G.

Quartum & vltimum solidum D. ex ductu simplici siue directo genitum, est æquale primo A. in nostro casu.

Primum corpus ex ductu sub alterno genitum est E, quod oritur ex segmento parabolico A I D in se subalterne ducto, & est æquale semicylindro, cuius basis est semicirculus A Q I & altitudo latus rectum parabolæ, vt suprà Prop. 5. Huius. Declaratum est, solidum ergo illud in nostro casu, in quo latus rectum ponitur vnitas, est ipsa area semicirculi A Q I suprà hoc numero definita 1285'10 vel 1285'1 figurâ O inutili expunctâ. Fig. 25.

Secundum corpus F ex plano F L O in se subalterne ducto profectum, notum euadet: si numerus 16444-0'80 ad solidum B inueniendum paulò ante constitutus, dematur ex plano mixto E K R V, quod est 16444-2'2, vt reliquus fiat 1'4, solidum F quæsitum exprimens.

Tertium solidum G, quod ductus subalternus in se plani S F O T producit, habebitur si numerus 4900-60'80 ad solidum C inueniendum adhibitus, addatur

ad

ad planum EKRV 164442'2 vt fiat 654503'0. Hic enim numerus ſolidum G exprimit; vt in quærendo ſolidum C præmonui.

Quartum ſolidum H, primò E æquale eſt. Iam inuenta ſolida componamus in ordinem aptum ad eorum Proportiones definiendas. Ita ergo habebunt prima ſpecie.

A 1636'24	C 654507'04	E 1285'1	G 654503'0
B—- 5'44	D—-1636'24	F—-1'4	H—-1285'1

Quod ſi ad minimos terminos reducantur A,B,C,D (reliqua E,F,G,H, iam ſtant in minimis) & fractio, ab vtriſque expungatur, cum idem ſit eius Denominator, ſic ſtatuentur eadem ſolida.

A 20453	C 8181338	E 12851	G 6545030
B—— 68	D--- 20453	F—— 14	H---- 12851

Inuenta quantitate ſolidorũ ſingulorum, inquiri debet Proportio Rationum quas inter ſe obſeruant: & primò quidem Rationũ AB & CD ad ſolida ex ductu ſimplici in ſe genita pertinentium. Hæc Proportio, ſi methodus in antecedenti exemplo adhibita obſeruetur,

Fig.25. ea futura eſt: quam hi termini K & L ad eam exprimendam deſignati exhibent. At verò Proportio inter Rationes ſolidorum E, F & GH, quæ characteribus M & N deſignari ſolet; ea eſt, quam refert ſchema appoſitum.

K—20453	M—12851
L—27201	N— 7130

Nunc

Nunc demum inquiratur an ſimiles ſint, ſiue, quod idem eſt, æquales, huiuſmodi Proportiones K L, M N. id eſt, earum denominatores ſiue quantitates inueſtigentur methodo in ſuperiori caſu Prop. 15. ex Prop. 9. lib. 1. huius allatâ: quam vt hic etiam obiter indicem, fiat decuſſata terminorum proximo ſchemate poſitorum multiplicatio, K in N, & M in L. Si enim, vt vult Geometra noſter, Proportiones illæ ſint æquales, æquales eſſe neceſſe eſt earum Denominatores P & Q eâ multiplicatione productos. En illos ipſos, quos hoc ſchema refert. An æquales numeri cuipiam videri poſſunt, qui toto hoc numero 201930161, hoc eſt, duplo fere minoris numeri inter ſe diſcrepant? Probata igitur eſt euidentiſſime harum duarum Proportionum K L, & M N inæqualitas. Probata ergo æquè euidenter tam Propoſitio 16 quam eius confirmatio hic allata. atque adeo demonſtrata Quadraturæ, quæ ex earum Proportionum æqualitate pendet; non vſquequaque abſoluta ſolutio.

P —	145829890
Q —	347760051

Scholium.

Præter hæc duo allata exempla, quorum Epilogiſmos tum hac tum præcedenti Propoſitione ſigillatim & ad longum proſecutus ſum: alia aliquot ſum aggreſſus, aliis & aliis factis ſuppoſitionibus linearum, quæ totius calculi ineundi rudimenta continent. vt ſcilicet ego à memetipſo omnem ſcrupulum eximerem

erroris alicuius admiſſi. vix enim in animum inducere tandem potui tantum Geometram & ſibi & aliis impoſuiſſe in re apud Geometras præ cæteris celebrata. Verum in omnibus illud perpetuum obſeruaui, vt ſcilicet Proportio K L Rationum A B, C D quam habent ſolida A, B; & C, D ex ductu ſimplici orta, minor ſemper ſit Proportione M N Rationum E F, G H; quam habent ſolida E, F; & G, H, ex ductu ſubalterno emanantia. En eorum exempla aliquot, quæ eodem ſeruato ſyſtemate breuiter expono, poſitis lineis vnde naſcitur Proportio vtraque K L, M N, quæ æqualis eſſe deberet iuxta Aſſertionem Authoris, ſiue earum Proportionum Proportionalitas P Q; cuius termini, æquales forent, ſi vere Geometra concluderet. In his porro omnibus ſuppono Latus rectum ſemper vnitate conſtare ob maxima compendia inter putandum inde oriri ſolita, vt aliâs monui.

Latus rect.	1	1	1	1
A B	16	164	10	4
A V	9	100	6	3
A E	7	64	4	1
A I	2	36	2	2
V O	3	10	Γ 6	Γ 3
E F	Γ 7	8	2	1
E K	Γ 63	80	Γ 24	Γ 3

Proportionalitates.

P	25748	36058	1318162	56060
Q	30322	41629	1401055	61523

Habentur

Habentur in hac tabella quatuor diuersi casus, in quibus variæ supponuntur communis systematis quantitates linearum, itavt idem materialiter perseueret, formaliter tamen diuersum sit: quod ad iuuandam in concipiendo mentem, cui fini soli Geometricæ omnes delineationes inseruiunt, non minus imò magis videtur idoneum. Ex ea linearum diuersitate diuersæ collectæ sunt Proportionalitates P Q eadem planè methodo, qua superiùs vsus sum Prop. 16. & 17. Ex datis scilicet lineis plana tam rectilinea quàm mixta collecta sunt, & ex planis solida siue quæ ex ductu absoluto, siue quæ ex ductu subalterno generantur: tum Rationum, quas habent inter se, Proportiones obseruatæ: ac tandem harum Proportionum habitudines, siue Denominatores: aut, quod idem est, Proportionalitates definitæ: vt constaret, æqualésne forent (vt noua Quadratura exigit) an inæquales Proportiones duæ; quod ex terminis Proportionalitatis P, Q, qui Proportionum quantitatem exprimunt, æqualibus vel inæqualibus concludi debet.

Quantam verò hic licet intueri inæqualitatem terminorum P & Q in his omnibus exemplis: In quibus, sicut & in duobus superioribus Propositionis 16 & 17 ea inæqualitas, eius est rationis; vt Proportionalitatis Antecedens P semper sit minor Consequente Q. Quo certissimo signo demonstratur Proportionem ipsam K L Rationum A B, C D ad ductus simplices spectantium, minorem esse Proportione M N, Rationum E F, G H, quas ductus subalternus generat.

Scito demum in his Epilogiſmis omnibus, licet numeris conſtent non mediocribus, nihil à me omiſſum ſtudij vel diligentiæ; quo eos certos & ab omni labe immunes exhiberem: nullas non probationes operationum adhibui: varias ad eundem ſcopum vias aggreſſus ſum; nullis peperci repetitionibus: qui quanti ſit faſtidij labor, nouit quiſquis calculis huiuſmodi maioribus, ſurdis præſertim fractíſque numeris conſtantibus incubuit aliquando. Quod ſi nihilominus maioris certitudinis aut animi ſolùm gratia, veſtigia relegendo quibus ingreſſus ſum, quempiã ſubeat ſtudium calculos ſuperiores examinandi: is ne ſeipſum vel me condẽnet erroris, ſi quando collecti numeri à meis nonnihil diſcrepent obſeruet eorum non paucos ſurdis radicibus exprimi; eáſque maiores interdum, interdum minores, quam verum ferat, provt ad illud magis vel minus accedere viſæ ſunt, aſſumptas fuiſſe. Obſeruet etiam occurriſſe non rarò numeros fractos; quos in maximis numeris, vel omninò contempſi tanquam nullius momenti; vel etiam, quando vnitatis fractæ ſemiſſem ſuperabant, integram ipſam vnitatem vſurpaui. Horum, quæ alioqui diuerſitatis quidpiam & admiſſi erroris ſuſpicionem inuehere meritò poſſent, ſi habeatur ratio: ſpero à Logiſta quouis omninò non rudi ſuperiores omnes Epilogiſmos probandos fore. Atque adeò omni dubio procul Propoſitionem illam, quam excutimus, qua Rationum Proportiones (de quibus hactenus tam multa) æquales aſſeruntur omni, vitio non carere; eiúſque propterea expertem non eſſe nouum hunc Tetragoniſmum

gonismum huic Proportionum æqualitati velut fundamento innixum.

PROP. XVIII. THEOR.

Secunda hæc Circuli Quadratura, & duæ insequentes tertia & quarta huic affines, alio adhuc ex capite à Geometria vix agnosci debere videntur.

EXPOSITIO.

Priusquam huius sententiæ meæ probationem, vel potius eiusdem iam superiùs latæ confirmationem adducam: obseruandum est doctissimum Geometram Quadraturam hanc suam secundam ita absoluisse Propos. 77. lib. 10. operis Geometrici: vt eam, non aliqua singulari ad id instituta Propositione, sed pauculorum verborum compendio ad calcem citatæ Propositionis 77. quoddam quasi ex ea consequens Corollarium attigerit. Quia, vt sibi quidem, nec immeritò, videbatur; absolutam tum fore Quadraturam constaret: si modo constaret Propositionis huius veritas. Quare etiam ipsa sola mihi nunc discutienda est: ipsa enim vel labefactatâ vel stabilitâ, eandem sortem subitura est huic superstructa Quadratura tota. Stabiliri quidem firmiter omnino non potest. Cum enim medium, vnde tota probetur, non aliud assumatur, vt mox declarabo, quàm Propositio 62. cuius robur tam multiplici calculo superiore concussum est: & ipsam eodem impetu concussam fuisse necesse est. Verùm, id ita perfe-

ctum, quaſi fundamentum ſuffodiendo: nunc verò, mutatâ aggreſſus ratione, etiam aperta vi illud ipſum Quadraturæ propugnaculum tentandum: id enim exigit totius huius diſcuſſionis præcipuum caput: exiget etiam fortaſsè Geometra non nemo Lector meus: qui ſuperioribus calculis, per ſe ſane ſatis moleſtis minùs delectabitur. Ponamus ergo nihil hactenus perfectum: Concedamus Propoſitionem illam 62. ſibi conſtare: hiſque permiſſis, Propoſitionis 77 citatæ oppugnationem ineamus: quam longe breuiorem planiorémque ſuperiori futuram polliceor. Ac in primis ipſa tota ex ſenſu atque adeo verbis ipſis Authoris proponenda eſt; (ſeruato tamen ſyſtemate meo; & quibus conſtat iudicibus notis Alphabeticis) ſic enim quæ admittenda, quæ reiicienda videbuntur; exponi faciliùs poterunt: nec ipſum totum Authoris opus illud eximium Lectori neceſſarium erit: cuius, vt rarum eſt, facultas multis non ſuppeteret. En ergo eius verba ad Propoſitionem 77, poſt conſtructionem figuræ: cui Prop. 9. Superiori omnino parem exhibui.

PROPOSITIO LXXVII.

Oporteat autem rationem exhibere, quæ eſt inter corpora, quæ oriuntur ex ſubalterno ductu AID in IAX: & ex ductu FLO in LFG, vel inter ſolida quæ fiunt ex ductu ſubalterno planorum FLPS in FLTOO, & AIM in IAY.

Vel meâ vſurpatâ hactenus deſignatione; quam expoſui Prop. 9.

Oporteat

Oporteat Rationem exhibere quæ est inter corpora E & F; vel inter corpora G & H.

Figura Vigesimaquinta.

Constructio & Demonstratio.

Demonstratum est Prop.62. quod Proportio quæ est inter Rationes solidorum A & B (mea vtor designandi consuetudine) *& C, D: eadem sit cum Proportione quæ reperitur inter Rationes solidorum E, F & GH.* Tum paucis omissis ad rem nihil conducentibus. *Igitur si Proportio* A Fig.25.

rationis

rationis inter A & B ad rationem inter C & D est vt Proportio rationum ΛΜ *&* ΠΚ *: etiam Proportio, quæ est inter rationes E F; G H eadem erit cum Proportione inter Rationes* ΛΜ *&* ΓΚ.

B *Quare etiam Proportio inter rationes corporum A, B, & E F eadem erit* (permutando ſcilicet) *cum Proportione quæ est inter rationes corporum C, D; & G, H.*

C *Ac proinde* (inuertendo) *vt est Proportio rationis, E, F ad rationem A, B: ita est Proportio rationis G, H ad rationem C D.*

D *Fiat igitur vt F L O ductum in ſe ad A I D ductum in*
Fig.25. *ſe,* hoc eſt vt B ad A. *Ita F L O ductum in ſe ſubalternè ad* Δ, hoc eſt F ad Δ. *Et fiat vt A I M in ſe ductum ad F L P S ductum in ſe; ita A I M ductum in ſe ſubalterne ad* Φ, hoc eſt meo ſtylo, *fiat vt D ad C; ita H ad* Φ.

E *Erit itaque vt ſolidum ex ductu A I D in ſe ſubalternè ad* Δ, hoc eſt *E ad* Δ *:* Ita ſolidum ex ductu ſubalterno, *F L P S ad* Φ, hoc eſt, *ſolidum G ad* Φ.

F *Ac proinde cum hæ magnitudines prius ſint reductæ ad Cylindricas quantitates illis æquales: etiam Proportionem rationum exhibuimus, quæ ſunt inter illas ipſas magnitudines cylindricas.*

G *Quod ſufficit vt ex communis Geometriæ principijs eædem partes Cylindricæ ad parallelepipeda illis æqualia reduci poſſint: præmiſimus enim omnia quæ ad hoc ipſum neceſſaria ſunt, vt plenius in quarta Quadratura cognoſci poterit.*

Atque hæc eſt tota Authoris non tantùm Propoſitionis ab eo adductæ probatio: ſed præterea totius Quadraturæ ſuæ ſecundæ ſolutio obiter perſtricta potius

tius paucis illis extremis verbis; quàm pro rei dignitate, pertractata: quod forte queri iure, sibi videatur non nemo; dum obseruabit, illud vnum caput, cuius gratiâ tantum opus, tot Propositionum varietate distinctum, tanto labore concinnatum est; ne vno quidem exponi Problemate singulari: hoc ipsum ego sane non potui non mirari. Sed posthabitâ consilij huius (neque enim sine maturo consilio ita se gessisse vir tantus censendus est) inuestigandi curâ inutili: & absolutis, quæ ad expositionem allatæ Propositionis meæ necessaria videbantur, eius probatio est deinceps instituenda. Quæ, vt expeditiùs absoluatur, totam ratiocinationem Authoris proximè allatam in paragraphos distinxi, & charactere quemque suo insigniui, vt facilius consulatur. Sit ergo

Demonstratio.

Resumatur itaque Propositio Authoris de qua agitur. *Oporteat*, inquit, *Rationem exhibere, quæ est inter corpora E & F: vel, inter corpora G & H.* Primum E dicitur illud, quod ex subalterno ductu segmenti Parabolici A I D in se, oritur: vt hactenus à me vocitatum est iuxta Propositionem 9. Secundum F nascitur ex segmento F L O in se pariter subalternè ducto. At tertium G & quartum F ex segmentis F L P S, & A I M eodem modo ductis hanc, si fas est, è Geometriæ sinu abstrahit hoc argumentum. *Fig. 25.*

Ratio solidi E ad solidum F, vel solidi G ad solidum H, exhibetur à Geometra per Proportionem notam

Rationum ipſarum E ad F & G ad H. Sed per Proportionem notam ipſarum rationũ E ad F, & G ad H, exhiberi non poſſunt ipſæ rationes E ad F, vel G ad H. Ergo reuera ipſæ non exhibentur, vt aſſerit Propoſitio.

Figura Vigeſimaquinta

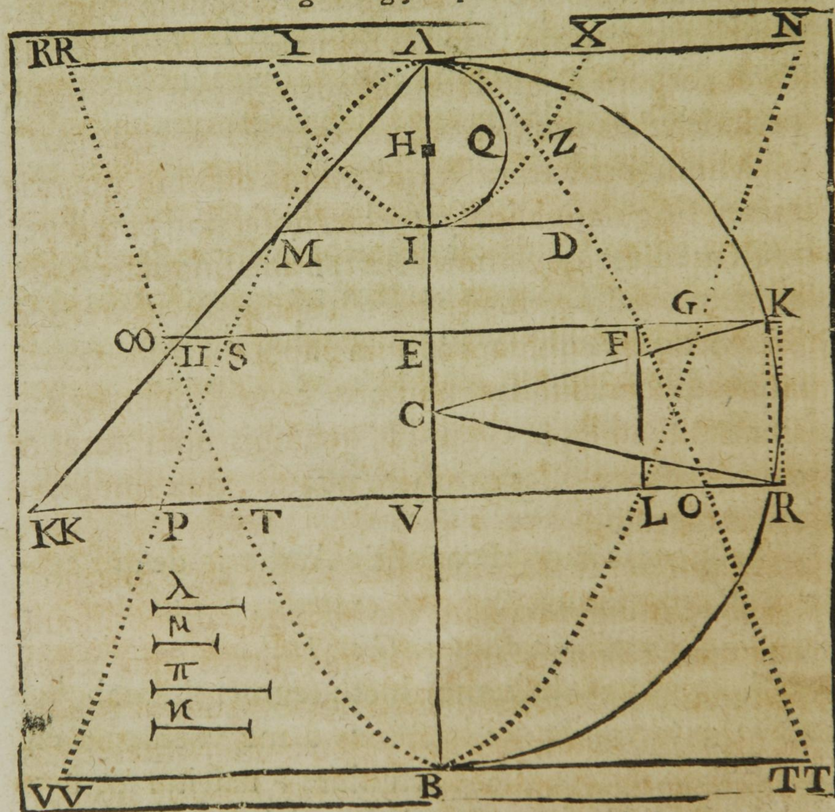


Fig. 25. Maior in controuerſiam non vocatur à Geometra, vt ex toto contextu Propoſitionis huius ſuæ; & ex tanta congerie Theorematum, quibus hanc Proportionem rationum E ad F, & G ad C venari conatus eſt, euidentiſſimè conſtat. Conſulantur vel prima ipſa verba ſuperioris paragraphi A. Ita verò notam Proportionem illam

illam Rationum E ad F, & G ad H meminerit, vt id tantùm permittatur à me; & concedatur, quod in expoſitione ſuperiori conceſſum & ſuppoſitum eſt, nimirum veram eſſe Propoſitionem 62. Authoris, qua aſſerit eandem eſſe Proportionem rationum corporis A ad B; & corporis C ad D: & rationum corporis E ad F; & corporis G ad H: Atque adeo notam eſſe hanc, perinde vt illa nota eſt. Maior ergo illa ſic vera eſto.

Minor probatur. Ratio aliqua duarum quantitatum ſingularis alicuius ſpeciei noſci non poteſt per illud medium: quod nō vnam tantùm ſingularem rationem ſed infinitas perinde eſt aptum exhibere. Sed Proportio quæuis data & nota, apta eſt infinitas rationes ſpecie diuerſas exhibere. Ergo Proportio Rationum E ad F, & G ad H, quamuis nota foret & data, Rationes illas exhibere nequit, quæ ſint certæ vnius ſpeciei.

Maior per ſe clariſſima eſt. Minor ergo ſola, probatione indiget: quam ſic inſtituo euidentiſſimè, aſſumptis terminis diſcretæ quantitatis qui æque conueniunt continuæ. Eſto notæ vel datæ Proportionis Denominator 2, qui velut quidā Antecedens connotat Conſequentem terminum 1, vt libro 1. Prop. 2. expoſui, & indicat Rationem duarum, ex quibus per ſe reſultat hæc Proportio, priorem eſſe poſterioris duplam (eſt enim Proportio, duarum rationum ratio; conſule librum primum) Aſſero igitur huiuſmodi Proportionem, cuius Denominator eſt binarius ſiue 2. Rationibus infinitis, ſpecie diuerſis,

quarum prior ſit poſterioris dupla, æqualiter omnibus conuenire; & æque omnes denominare. Exemplis rem illuſtremus. Proponantur duæ rationes ita vt prioris Antecedens ſit 8, & Conſequens 2.(quæ ratio eſt Quadrupla) Poſterioris verò Antecedens ſit 4. Conſequens iterum 2. (quæ ratio eſt dupla) quia igitur hæ duæ rationes 8 ad 2.& 4 ad 2 eundem habent Conſequentem 2. eam habebunt inter ſe Proportionem ſiue etiam rationem (cum Proportio ſit rationum ratio) quam ipſi Antecedentes 8 & 4 habent inter ſe per Prop.7. lib.1. huius. ita vt prior ratio 8 ad 2, dupla ſit rationis poſterioris 4 ad 2. ſiue Quadrupla ratio ſit dupla rationis duplæ vt earum Proportionis Denominator 2 indicat. Rurſus. Duas alias Rationes à duabus præcedentibus ſpecie diuerſas aſſumo: quarum Proportio, vt patebit, ſit dupla. Sit ergo Antecedens prioris 10 & Conſequens 4. poſterioris verò Antecedens eſto 5 & Conſequens 4. idem ſcilicet cum Conſequente prioris Rationis. Quia igitur harum duarum Rationum 10 ad 4 & 5 ad 4. idem eſt Conſequens, nempe 4: ita ſe habebunt inter ſeſe, vt ſe habent ipſi earum Antecedentes 10 & 5. per Prop.7.lib.1.huius. Erit igitur prior ratio 10 ad 4. ſiue dupla ſeſquialtera, rationis poſterioris 5 ad 4.(quæ eſt ſeſquiquarta) dupla: Earúmque Proportio (quæ aliud non eſt quam earum Rationum Ratio) dicetur dupla: qualis ſcilicet iam fuit Proportio Rationum 8 ad 2, & 4 ad 2 ab his ſpecie diuerſarum. Denique vt verbo rem abſoluam, quoties duæ Rationes proponentur

proponentur (Proponentur autem innumeræ) quarum termini Conſequentes, æquales facti fuerint vel reductione vel ſuppoſitione. Antecedens verò vnius, duplus fuerit Antecedentis, alterius: toties earum Rationum Proportio dupla erit. Quæ cum ita habeant: exhibebit, ſcilicet, aliquis ope notæ Proportionis duarum rationum, Rationes ipſas certæ & determinatæ alicuius ſpeciei, & quantitatis terminorum ſuorum, cuiuſmodi in præſenti negotio exhibendæ forent? Quî igitur fieri poteſt, vt Propoſitio illa 77 Authoris datam fidem præſtiterit, exhibueritque Rationem corporum E, F vel G, H, ex ſola Proportione Rationum E ad F, & G ad H; quam, violatâ interim æquiſſimâ ſententiâ calculi ſuperiùs accuratiſſimè inſtituti, ſupponi permiſi, non admiſi, eandem eſſe cum Proportione Rationum A ad B & C ad D: quæ nota eſt, cum ipſæ Rationes ſint corporum A, B; & C, D (quænam corpora hiſce characteribus deſignem, iam ſæpius declaraui) quæ parallelepipeda ſunt eiuſdem altitudinis: imo Rationes ſint horum corporum baſium, quæ rectis tantùm lineis circumſcribuntur.

Hoc dubium meum circa Propoſitionem hanc 77. non mediocriter auxit eius ipſa Concluſio longe à Propoſitione aliena. En vt ſonat Propoſitio. *Oporteat Rationem exhibere, quæ eſt inter corpora E & F, vel inter corpora G & H.* Concluſio verò vt ſe habet? En eius verba ex paragrapho ſuperiori F fideliter relata. *Ac proinde cum hæ magnitudines priùs ſint reductæ ad Cylindri-*

cas quantitates illis æquales (reductio hæc habetur ſuprà Prop. 14. huius) *etiam PROPORTIONEM RATIONVM EXHIBVIMVS, quæ ſunt inter illas ipſas magnitudines Cylindricas.*

Eámne concluſionem tandem ſecuturam ſuſpicari quis poſſet? Nunquid Concluſio, ipſiſſima Propoſitio non eſſe debet quæ vel probáda, ſi theoretica, vel ſoluenda, ſi Problematica fuerit, vt hæc, in medium adducta fuerat? huic Propoſitioni. *Oporteat Rationem exhibere quæ eſt inter corpora E & F, vel inter corpora G & H* ſeruatis Logicis Placitis, ſeruato Geometrarum omnium etiam noſtri, toto hoc eximio ſuo opere, ſolemni Problemata concludendi more, non alia potuit ſubnecti Concluſio, quàm huiuſmodi. *ERGO RATIONEM EXHIBVIMVS quæ eſt inter corpora E & F, vel inter corpora G & H Quod erat faciendum.*

Illam verò. *Proportionem Rationum exhibuimus quæ ſunt inter ipſas Cylindricas magnitudines.* (Quam diuerſiſſimam prodit vel ipſa paulò ante adducta ratiocinatio mea) cur ei ſubſtituerit eximius Geometra, non aliud mihi quidem occurrit cauſæ (aliud fortaſſe ipſi occurrerit) quàm quod obſeruarit non eò vſque promotam fuiſſe conſtructionem ſuam vt Rationes ipſas (quod apertiùs mox declarabo) exhiberet, vt Propoſitionis ſententia exigebat quo nomine, defectûs alicuius eandem arguere, ſaluo tanti viri iudicio, coactus ſum. Quod ne temere auſus in clariſſimum Geometriæ lumen vllo modo videar ipſam etiam eius conſtructionem, vt proxime monui, nunc perpendam

pendam ante quam decretoriam Propositionis meæ conclusionem proferam.

Nemo Geometra non nouit Problema omne Geometricum, quale est hoc, quod excutimus, constructione, & ritè institutæ constructionis demonstratione constare. Hic non aliam obseruare licuit quàm quæ paragrapho D & sequenti E absoluitur. Postquam igitur iuxta Propositionem suam 62. quæ medium est vnicũ ad stabiliẽdam assumptum, & qua vt vera vti eum nunc quidem patior; exposuit per Permutationem Inuersionémque Rationum paragraphis B & C absolutam: eandem esse proportionem rationis E ad F ad rationem A ad B. (etiam hic memoriá refrica, significationis horum meorum characterum & tabellam, amo te, denuo consule ad Propositionem 9. appensam) cum proportione Rationis G ad H, ad Rationem C ad D; ita constructionem aggreditur citato paragrapho D.

Fiat igitur inquit, *vt B ad A, ita F ad Δ. Et vt D ad C, ita H ad Φ.* Hæc est constructio breuiùs sane tradita, quam rei momentum ferat quam plusculis aperio sigillatim. *Fig. 25. & 26.*

Fiat vt B ad A, ita F ad Δ. Id ita absoluetur. Quia corpus B, quod illud est, quod oritur ex ductu segmenti Parabolici FLO in se, æquale est parallelepipedo cuidam quod notum est, vt Prop. 6. ostendi: corpus verò A, ortum scilicet ex ductu segmeti Parabolici AID in se, est etiam æquale cuidam parallelepipedo eiusdem cum priore altitudinis, quod item notum est ex citata

Propo-

Fig. 25.

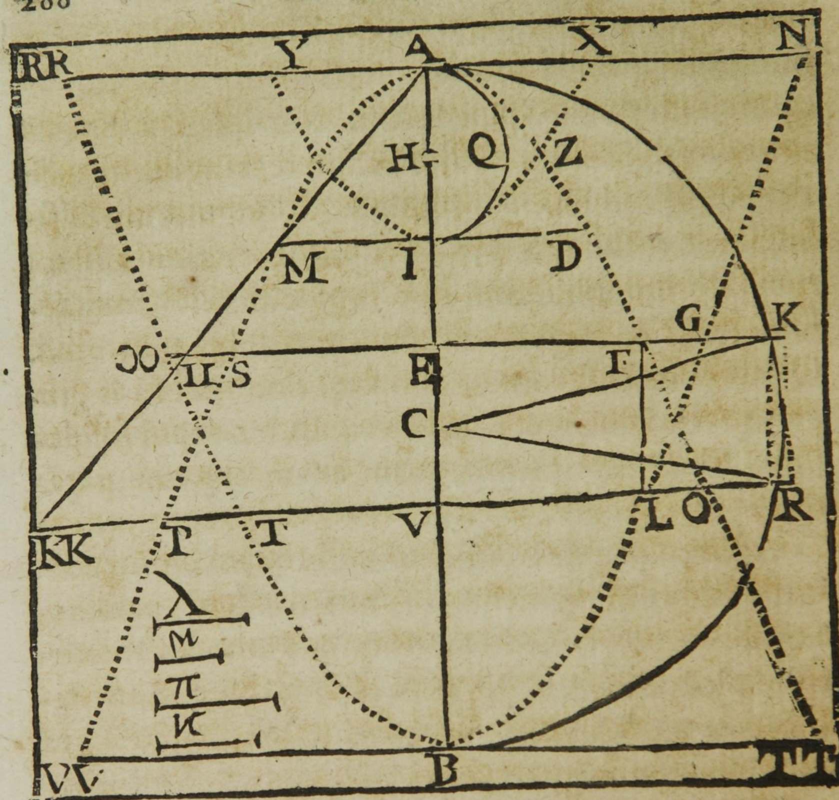
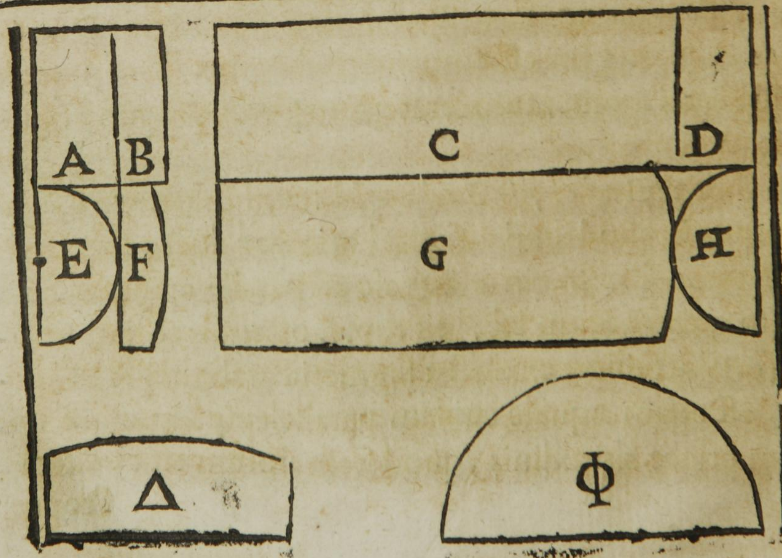


Fig. 26.



Propoſitione. Hinc fit vt nota etiam ſit eorum corporum ratio: quæ alia futura non eſt quàm ratio baſium eorumdem parallelepipedorum; cum ipſa ſint æqualis altitudinis. Sint ergo baſes in duo rectangula æqualis altitudinis reductæ: eorúmque rectangulorum baſes ſint lineæ rectæ A & B: quæ exprimant rationem duorum ipſorum ſolidorum A & B. Nec alia eſt natura ſolidorum C & D vt in eadem citata Prop. videre eſt. Quare peractâ Geometricâ operatione neceſſariâ, repertæ ſunto duæ rectæ lineæ C & D, rationem ſolidorum C & D exprimentes quam etiam exprimunt ipſa rectangula C & D.

Ad hæc corpus E, ſiue ortum ex ſubalterno ductu in ſe Parabolici ſegmenti A I D; eſt ſolidum quoddam æquale corpori cylindrico, vel cylindraceo: cuius baſis eſt ſemicirculus A Q I, vt fuſe ſuperiùs loco citato declaratum eſt. Idem dic de ſegmento Parabolico A I M in ſe ſubalterne ducto, quod gignit ſolidum à me vocari ſolitum H. At corpus F quod eſt ſolidum genitum ex ductu ſubalterno ſegmenti Parabolici F L O, æquale eſt corpori cylindraceo æqualis altitudinis cum præcedentibus E & H; cuius baſis eſt mixta figura inter duas lineas E K, V R ſyſtematis interiecta, clauſa verò, hinc quidem, rectâ ad lineas E K, V R perpendiculari; inde verò, arcu K R. Hæc vt Geometrice inueniatur etiam ſuperiùs aperui Prop. 5. & 14. hic interim ea figura exponatur, ſuóque Charactere F inſigniatur. Idem dicendum de corpore G, quod oritur ex ſegmento F L P S in ſe ſubalterne ducto. Sit ergo etiam eius baſis ex- *Fig. 25. & 26.*

 poſita,

Fig. 25.

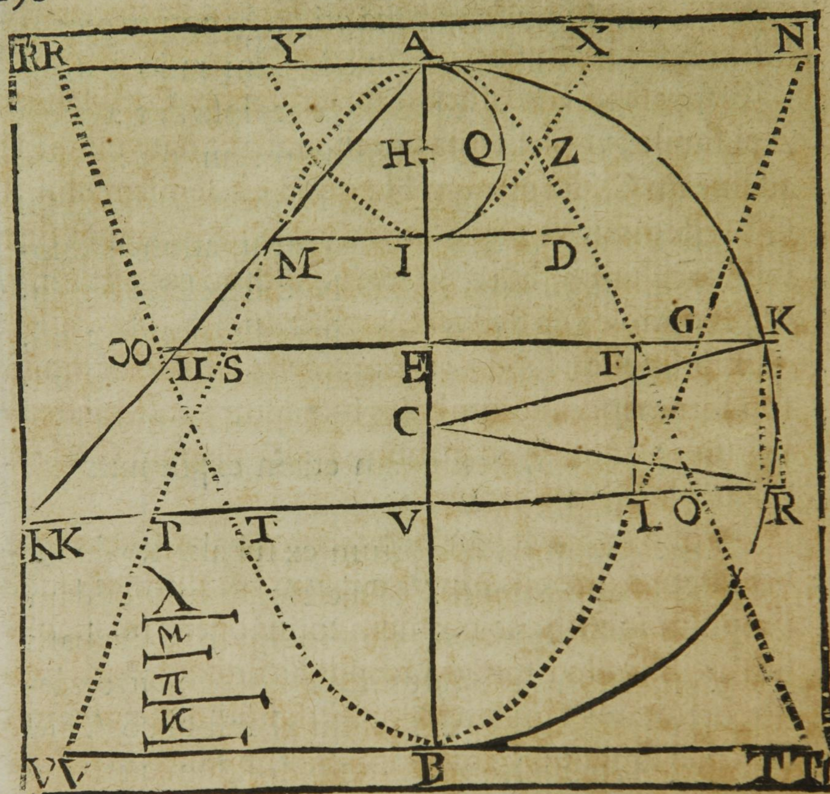
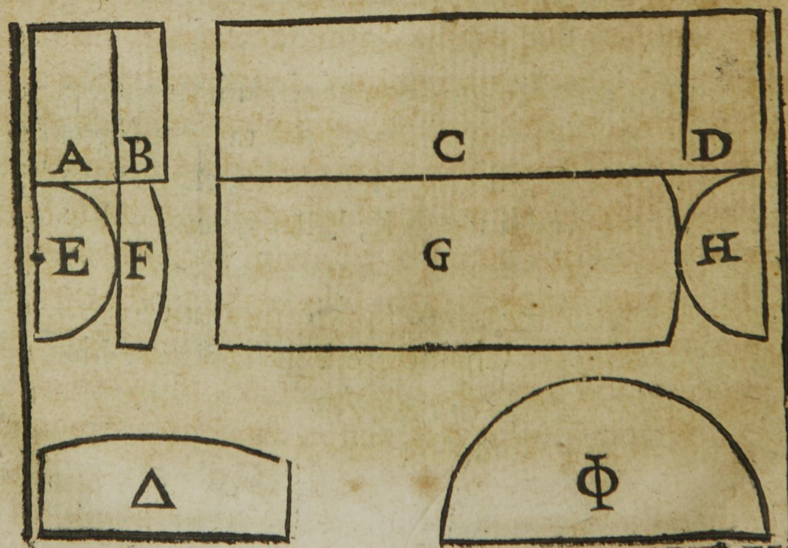


Fig. 26.



posita, & inusta suo Charactere G. His ita declaratis. Sic habet constructio.

Fiat vt linea B ad lineam A: ita planum F ad planum Δ ei simile, vt Elementa præcipiunt. Et fiat vt linea D ad lineam C, ita planum H (quod est semicirculus A Q I systematis vt paulò ante monui) ad planum siue semicirculum Φ. Hæc est tota Authoris constructio. Quid porrò ex ea deducat, audiamus.

Erit itaque (subdit vt paragrapho E habetur modò solidorum loco, eorum bases sumantur) vt semicirculus siue planum E ad planum Δ: ita planum G ad semicirculum siue planum Φ.

At quo ex fonte hanc sequelam deriuat Geometra? vix, fateor, à querelis aduersus ipsum hic abstineo: quod Propositionem hanc, omnium totius operis sui grauissimam, quando omnium scopus ac finis est, Archimedea breuitate & grauitate, nullâ rudiorum Geometrarum mei similium habita ratione tam paucis exposuerit, nec indicem saltem intenderit eò, vnde singula ipse hausisset. Sed omissa omni querela erga virum tam bene de Geometris meritum, sequelam hanc è posita constructione profectam, verissimam assero: & ab ipso Authore, qui in rationum negotio nihil à se desiderari passus est, assertionis demonstrationem haurio. Quæ vt apertior fiat; numeros assumam loco solidorum ex ductu tam simplici quàm subalterno genitorum, vel potius his æqualium solidorum cylindraceorum: aut etiam, quod expedit, loco basium, quibus solida illa cylindracea insistũt; bases enim eandem seruant ratio-

nem quam corpora ipſa, quorum ſunt baſes: cum eadem ſit eorum altitudo: eiſque numeris eoſdem Characteres inuram, vt numerorum ad baſes illas tranſlatio planior fiat.

Sit ergo in hoc ſchemate eadem Proportio Rationum A ad B, & C ad D; cum Proportione Rationum E ad F, & G ad H (veram enim eſſe Propoſitionem 62. Authoris, hic etiam ſupponi patior.) Ergo Permutando. Eadem erit Proportio Rationum A ad B, & E ad F; cum proportione Rationum C ad D, & G ad H. fiat iam, vt iubet in ſua conſtructione Geometra, vt B ad A; ita F ad Δ. & vt D ad C; ita H ad Φ Dico ita eſſe E ad Δ, vt G ad Φ. Nam cum ponatur, vt Conſequens B ad Antecedentem A; ita F ad Δ: etiam inuertendo, ita erit Δ ad F, vt A ad B. Ergo eadem eſt Proportio rationum Δ ad F, & E ad F; cum proportione Rationum C ad D, & G ad H. Sed propter ſimilem conſtructionem; erit Proportio Rationum Φ ad H, & G ad H eadem cum Proportione Rationum C ad D & G ad H. Ergo eadem eſt Proportio Rationum Δ ad F & E ad F; cum Proportione Rationum Φ ad H, & G ad H. Quia verò tam Rationum Δ ad F, & E ad F, idem eſt Conſequens F; quam Rationum Φ ad H, & G ad H, idem H. Erunt duæ priores Rationes Δ ad F (ſiue A ad B) & E ad F vt Rationum Antecedentes Δ & E. Hoc eſt, Proportio Rationum A ad B, & E ad

A. 8	E. 10.	Δ 16
B. 2	F 4.	
C 6	G 15	Φ 24
D 3.	H 12	

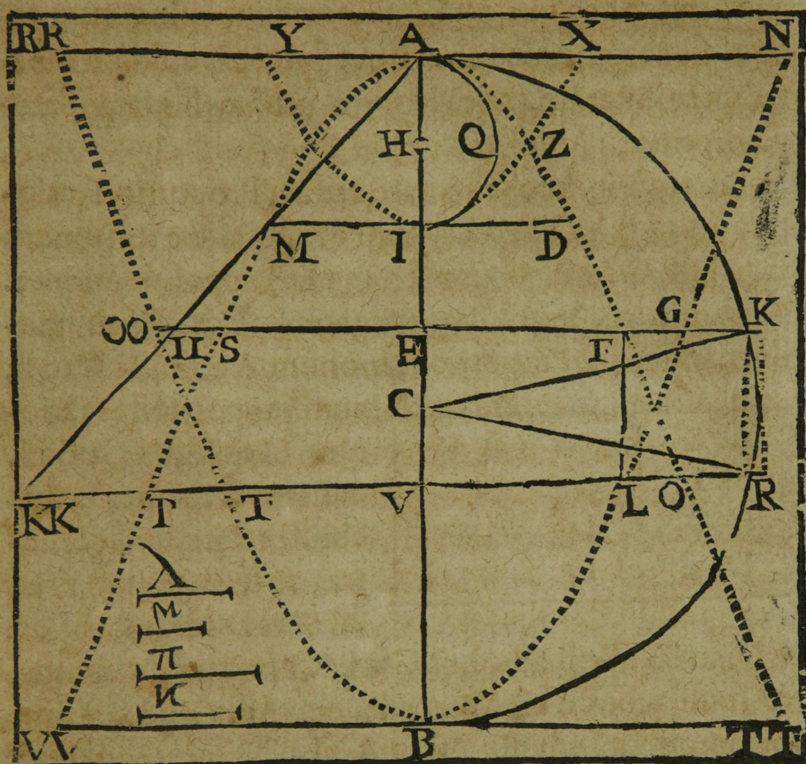


Fig. 25.

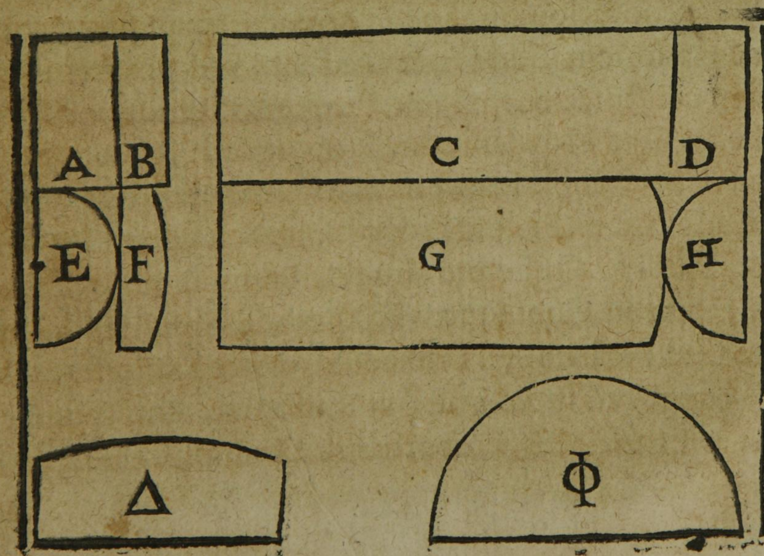


Fig. 26.

ad F exprimitur denominatore Δ ad E per Prop.2.libri Proportionalitatum vel per Prop.7.lib.1. huius. Simili-
Fig.25. & 26. ter Φ & G erũt Denominator Proportionis Rationum C ad D & G ad H. Sed eadẽ eſt hæc vtraque Proportio ex ſuppoſitione. Ergo ita eſt Δ ad E, vt Φ ad G. Vel Inuertendo, E ad Δ vt G ad Φ. Rectè igitur & ſuo more acutiſſimè intulit Author ex conſtructione ſuâ, ita eſſe E ad Δ, vt G ad Φ. Vel Inuertendo. Δ ad E vt Φ ad G.

Atque ea ſola æqualitas Proportionis Rationum A ad B, & E ad F; & Proportionis Rationum C ad D, & G ad H; quarum Proportionum Denominatores ſunt Δ ad E, & Φ ad G; colligitur ex conſtructione ab Authore inſtitutâ. Nec vllo modo exhiberi poteſt eius conſtructionis operâ, id quod maxime ſperabatur, & Problema propoſitum exigebat: nimirum, vel Ratio ſolidi E geniti ex ductu in ſe ſubalterno ſegmenti Parabolici A I D, ad ſolidum F ortum ex ductu in ſe ſubalterno ſegmenti Parabolici F L O; aut ſolidorum Cylindraceorum illis æqualium: quorum baſes, ſunt ſemicirculus A Q I (quam etiam E vocito) & mixta figura F. vel etiam (quod idem eſt, & quod vltimò ſtabilitur, ad Problematis ſolutionem neceſſarium) ratio baſium ipſarum E & F; cum eadem ſit cum Ratione corporum vel etiam Ratio ſolidi G ad ſolidum H, ſiue etiam baſium G & H, eandem cum ſolidis Rationem habentium. Imò tantum abeſt vt per hanc conſtructionem Ratio baſis E ad baſim F, vel baſis G ad baſim H obtineatur: vt ne ipſa quidem ſpecies Proportionis, quæ eſt inter rationes A ad B, & E ad F, vel Proportionis Rationũ C ad D, & G ad H, eius ope reperiatur, ſed æqualitas

litas tantùm inter ipſas harum Rationum Proportiones, concludatur. Adeo vt Propoſitio hæc 77. ad exhibendam Rationem baſis E ad baſim F, vel baſis G ad baſim H; ineptior ſit quam fuerat ipſa Propoſitio 62. quæ (niſi repugnaret calculus ſuperior in illius Propoſitionis examen adductus) concludebat eandem eſſe Proportionem Rationis baſis E ad baſim F ad Rationem baſis G ad baſim H; cũ Proportione rationis baſis A ad baſim B, ad Rationem baſis C ad baſim D. cum enim hæ baſes rectilineæ ſint: ambæ Rationes notæ erunt, atque adeo earum Proportio: cui cum ſit æqualis iuxta illam Propoſitionem 62. Proportio Rationum E ad F, & G ad H, etiam hæc Proportio nota erit: contra quàm fiat in hac Propoſitione 77. In qua, vtraque Proportio tam rationum A ad B, & E ad F; quam Rationum C ad D & G ad H, ignota eſt ob ignotas Rationes E ad F, & G ad H: cum quibus componuntur Rationes notæ A ad B, & C ad D ad procreandas Proportiones inter ipſas Rationes. Atque hactenus ſatis multis, quæ tum quæſtionis obſcuritas, ſummâ cum tractationis à Geometra inſtitutæ breuitate coniuncta: tum rei grauitas exigebant; ſatis clare mihi videor expoſuiſſe Propoſitionem hanc 77. in qua tota erat poſita difficultas. Nunc tandem concludo tota Ratiocinatione mea in hunc modum collecta. *Fig. 25. & 26.*

Cum Propoſitio 62. Authoris, ex qua totum deriuatur robur Propoſitionis 77. ad Tetragoniſmum neceſſariæ & proxime influentis labe aliqua laborare oſtenſa ſit ſuperiore tam multiplici calculo. Cum item, etſi illa vera & firma ſtare ſupponatur; nihilominus tamen

hæc;

hæc; dũ aliud expressis verbis pollicetur, expressis verbis aliud in conclusione præstat: dum Rationẽ E ad F, vel G ad H exhiturã præ se fert, & Proportionem Rationũ A ad B & E ad F & rationũ C ad D, & G ad H inuestigat; apertũ ruinæ discrimen incurrat. Cum tertiò eius allata cõstructio ad Rationes exhibẽdas, vt debuisset saluâ eiusdem Propositionis fide, nõ instituatur: sed nec ad aliud institui hac viâ, quã ad Proportiones posse ostensum sit. Cũ quartò Proportiones dictas ad aliquid circa Tetragonismum decernendum ineptas esse demonstarim, nisi accedat ipsarum Rationum cognitio.

Cum denique suprema statutæ ab Authore conclusionis verba hæc. *Quod sufficit vt ex communis Geometriæ Principiis eædem partes Cylindricæ ad parallelepipeda ipsis æqualia reduci possint*, ipsis tantùm Rationibus E ad F, vel G ad H certis & determinatis; non autem earum proportioni; quæ nec Rationes certæ speciei, nec certos earum terminos exigit; conuenire possint cum, inquam, tot ac tantæ difficultates, quas insolubiles mihi videor demõstrasse, occurrerint: æqui bonique consulat Geometra præstantissimus, si quò cariùs reliquũ eius opus amplector, mirórque attentiùs; eò longiùs ab eius de absoluto à se Tetragonismo sententiâ abripiar, firmiúsque tuear veritatem huiusce meæ Propositionis 18. qua asserui nõ tantùm hanc secundam circuli Quadraturam, sed etiã duas insequentes tertiam & quartam huic affines, iisdemque Principiis innixas, eodem demonstrãdi genere collectas, vix à Geometria agnosci posse, adeoque saxum hoc Geometris adhuc super esse versandum,

FINIS.



APPENDIX

In qua nouus quidam Tetragoniſmus diſcutitur & re[illegible]tur.

E Prælo prope diem proditura erat illius celebris Quadraturæ ſuperior diſcuſſio mea: cum ab Amico *D. Comiers* noua circuli Quadratura tranſmiſſa eſt: quam apud multos Geometriæ non imperitos maximo cum plauſu exceptam referebat. Hortabatur inſuper vt, quando me ex ſuperioris tam prolixi quàm perplexi examinis cæco Labyrintho fauſtiſſimè, aiebat, expediuiſſem; hunc etiam recèns exortum Tetragoniſmum aggrederer; cum ab inſtituto non eſſet hæc opera aliena; nec longior futura, vnius ſcilicet Propoſitionis nec adeò reconditæ, quam ad me mittebat, diſcuſſione, abſoluenda. Suaſum tunc quidem mihi vt, tum Amico tum mihi ipſi priuatim ſatisfaciendi gratiâ, opus adorirer. Nec morâ

post admodum longâ, aut grauiore contentione comperi vitij aliquid (quod hac in re quantulumcunque, censetur maximum) in ea circuli Quadrandi ratione latere: nec per eam exhiberi, vt ab Authore asserebatur, rectam lineam circulari peripheriæ æqualem ex data diametro; sed paulò minorem. Placuit tamen ea Quadratio non mediocriter; tum quia perficitur Geometricâ solutione, qua nec simplicior nec expeditior obseruetur; tum maximè, quia vix vlli, ex innumeris, quæ passim teruntur, de præcisione concedat. Quæ perpendenti mihi tum demùm non ægrè, quod proponebatur, persuasum est. hanc scilicet nouam Cyclometriam non intactam hic esse relinquendam, nec esse planè indignam, quæ angulum quempiam in tabula, à qua necdum longè manum amoueram, occuparet. Desiderari quidem poterat à me plenior totius tractationis cognitio, quàm quæ vnica Propositione contineretur. Absolutius enim futurum fuisset examen hoc meum: si omnium Propositionum, è quibus hæc vltima colligitur, facta mihi facultas fuisset: fuisset enim continuò mihi facta facultas, ea, quæ obiici possent, petendi non è discretæ tantùm, sed continüæ etiam Quantitatis fundamentis. Sed quando horum omnium cognitionem assequendi spatium præcidit operarum fini imminentium tædium: ecce nunc quidem solam ad me datam Propositionem; meámque deinceps breuiter expositam de eâ sententiam.

Propositio Cyclometrica.

Si ad lineam, quæ potest radium & sinum Grad. 22. min. 30. circuli cuiuſuis, addatur ſemiſsis radij: componetur recta linea æqualis circumferentiæ Quadrantis eiuſdem circuli.

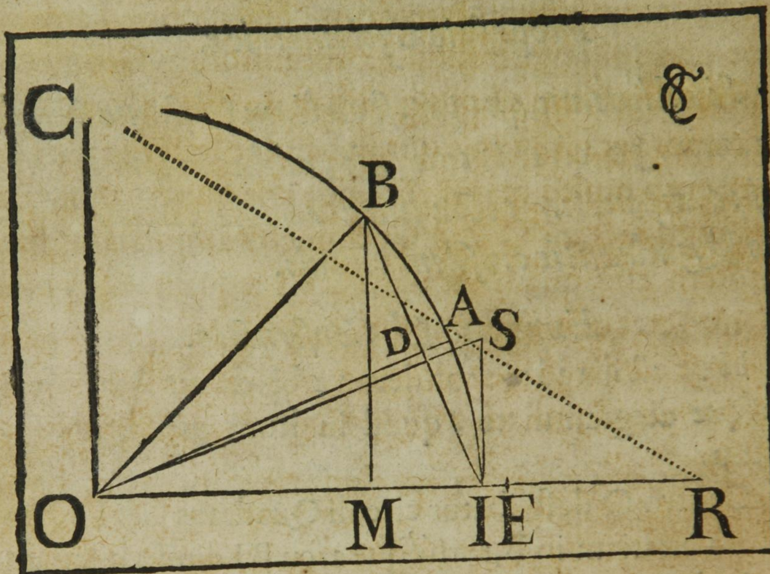
Expoſitio & Conſtructio.

Hæc eſt illa ad me totidem verbis delata Propoſitio abſque diagrammate, quod in hunc modum conſtituo.

Centro O deſcribatur circuli Quadrans C B I. Quo diuiſo bifariam in B, rurſúſque arcu B I diuiſo bifariam in A, ducantur lineæ O B, O A, B I: ſecabitur B I bifariam in D à recta O A; erítque I D ſinus arcûs I A qui continet Gradus 22. min. 30. Excitetur à puncto I lineæ O I, ad ipſam perpendicularis I S, æqualis ſinui I D; ducatúrque O S. Poterit hæc linea O S, radium O I, ſimúlque ſinum I D, aut I S per 47. lib. 1. huic lineæ O S ſumatur æqualis O E in linea O I productâ, eidémque addatur E R æqualis ſemiſſi radij O I. Erit ex Cyclometræ ſententia, tota recta linea O R æqualis peripheriæ C B I Quadrantis. Quod an verum ſit, nunc eſt expendendum. *Figura ſequẽs.*

PROPOSITIO SVPERIORI ADVERSA.

Breuior eſt recta linea O R: quàm vt arcui C B I æqualis eſſe poſſit.



Demonstratio.

Si ſinûum Canonem conſulamus, vt conſuli ſatis tutò poteſt; paucis innoteſcet Aſſertionis meæ veritas; Nam in triangulo rectangulo O I S, ſi ponatur O I ſinus totus 100 000: erit I S tangens anguli I O S. Sed, cum I S ponatur æqualis ſinui I D; ſit autem ſinus I D notus in partibus ſinûs totius O I: erit etiam tangens I S in eiſdem partibus nota atque adeò ex Canone notus erit angulus I O S; cuius ſecans eſt O S. Ergo & O S nota erit. Hæc ad rem applicemus. Sinus I D eſt 38 268. qui conuerſus in tangentem I S ſecans ei reſpondens eſt 107 072. tantáque eſt O S, ſiue O E, huic adde E R 50 000 ſemiſſem radij: fiet tota O R 157072 æqualis iuxta Cyclometram arcui C B I. Quod ſi O R 157072 duplicetur, vt fiat 314 144 hæc erit peripheriæ ſemicirculi æqualis: ad quam ita ſe habebit per 15. lib. 5. ſemediameter O I 100 000; vt ſe habet diame-

ter ad totam circumferentiam. Sed positâ diametro 100 000; circumferentia ex recentiorum Geometrarum accuratissimis Epilogismis maior verâ est 314 160, & minor verâ 314 159; à qua deficit hic inuenta 314 144. hæc ergo multò magis, breuior erit quam par sit. Patet ergo rectam O R à Cyclometra assignatam, breuiorem esse quàm vt arcui C B I æqualis esse possit. Quod erat demonstrandum.

Confirmatio.

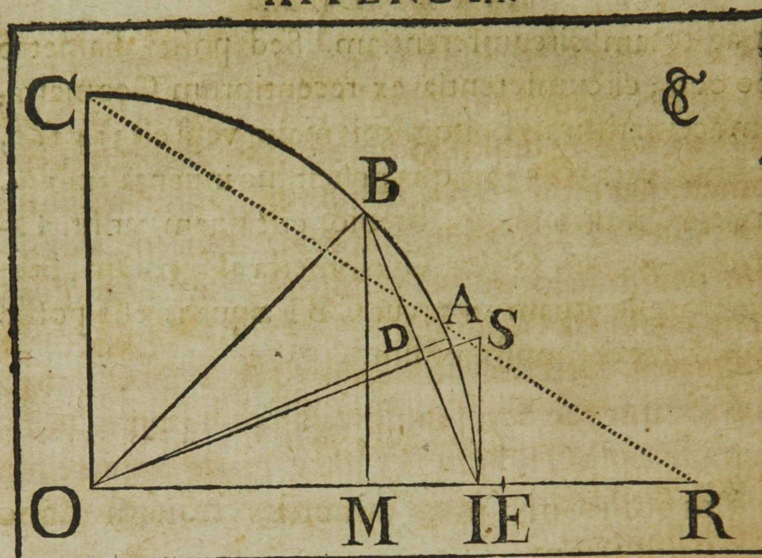
Propositionis meæ aduersus nouam hanc Cyclometriam.

Præparatio.

Quia sinus non sunt vt plurimum ita præcisi, vt aliqua, fractiuncula non omittatur: dubitauerit fortasse quispiam, ne defectus huius Cyclometriæ proximè obseruatus inde totus proficiscatur. Quod dubium absterget penitùs calculus ex ipsamet hypothesi petitus.

Ducatur itaque B M ad semidiametrum O I perpendicularis. Erit ergo B M æqualis rectæ O M (est enim in triangulo rectangulo O M B angulus O semirectus ex hypothesi; ergo & semirectus est eiusdem angulus B per 32. lib. 1. Ergo per 6. lib. 1. æquales sunt M B, O M). Ex notis verò M B, M I, nota fiet B I, atque adeò eius dimidia I D siue I S. Notis denique O I, I S nota erit O S siue O E, & tandem tota O R.

Primò ergo quæritur recta M I hoc modo. Radius



O I ſiue O B eſt 100 000. Eius Quadratum 10 000 000 000 æquale eſt duobus Quadratis M B, O M. Ergo eorum alterum O M eſt 5 000 000 000. Cuius radix eſt 707 107', maior verâ; & 707 106' minor verâ. hac radice O M minore verâ 707 106', demptâ ex toto radio O I 100 000 : reſtat MI 292 894' maior verâ. (maiorem verâ de induſtria aſſumo vt huic Cyclometriæ magis faueam, vt conſtabit.)

Secundò quæritur I B. Cum nota ſit facta M I, & eius Quadratum notum erit, nempe 85 786 895 23'6, & quidem maius vero, cum M I ſit maior verâ, huic ſi addatur Quadratum lineæ M B, quod eſt 5 000 000 000; fient duo ſimul Quadrata 585 786 895 23'6 hoc eſt Quadratum B I & quidem maius vero.

Tertiò. Quæritur recta O S. Quadratum I D, ſiue I S; eſt quarta pars Quadrati lateris B I (eſt enim I D, ſemiſſis lineæ B I) quæ quarta pars Quadrati B I, eſt

146 446 723 80'9. huic ſi addatur Quadratum radij O I, fiet Quadratum baſis O S trianguli O I S. 1 146 446 723 80'9 maius vero (ne excidat) ergo radix eius numeri, quæ eſt 1070723', maior verâ; exprimet lineam O S, ſiue O E, ei ex conſtructione æqualem, & quidem paulò maiorem verâ, hoc eſt, paulò maiorem, quàm ipſa linea O E exigat.

Quartò. Determinatur recta O R. Si ad O E 1070 723' addatur 500 000' ſemiſſis radij, vt præcipit Cyclometra, fiet ipſa O R 1570723 paulò maior quàm reipſa ſit O R Geometricè inuenta ex mente & conſtructione Cyclometræ.

Quintò. Concluſio tandem colligitur, eadem propè quæ ſuperiùs. contra hanc Cyclometriam. Si linea O R 1570723' æqualis, arcui Quadrantis C B I, duplicetur, fiet peripheria ſemicirculi 3141446' paulò maior verâ, poſita ſemidiametro 1000 000'. At eadem poſitâ ſemidiametro, ſemiperipheria totius circuli, ſiue, peripheria ſemicirculi minor verâ iuxta peritiſſimos Geometras eſt 3141590'. Ergo aut dicendus eſt ab hoc nouo Cyclometra numerus 3141446' maior quàm numerus 3141590' (cum hic minor ſit quàm ipſa vera quantitas peripheriæ ſemicirculi, ille verò eâdem peripheria maior ſit oſtenſus) quod foret abſurdum, aut fatendum veram Cyclometriam hoc modo non haberi. Quod hic confirmandum erat.

Corollaria.

Quædam hic obſeruatione digna omitti non debent: quæ in modum corollarij obiter proponam.

Coroll. I.

Coroll. I.

Conſtat calculum proximè initum non alios numeros offerre; quàm qui ſuperiùs per ſinus definiti fuerant. Hic ſiquidem ex ſemidiametro 1000000' inuenta eſt ex mente noui Cyclometræ, peripheria ſemicirculi 3141446', quæ per ſinus collecta fuerat 314144: expunge fractionem decadicam, quæ nullius momenti cenſeri debet, iidémque planè numeri vtrimque ſupererunt.

Coroll. II.

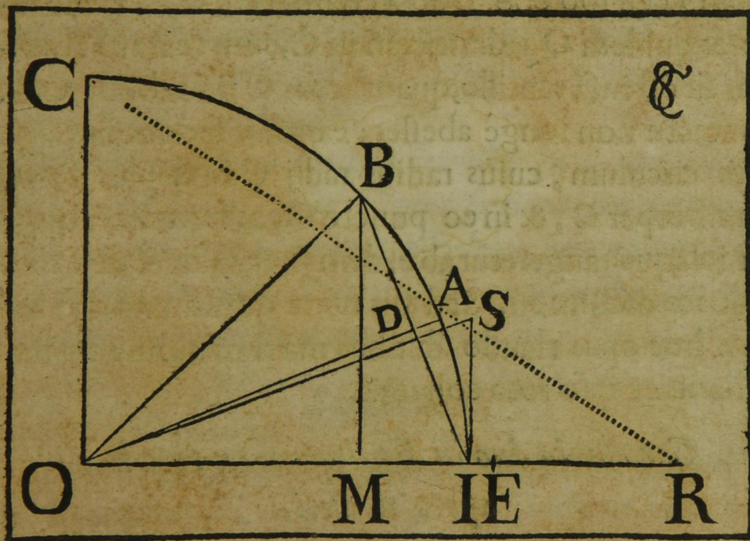
Conſtat ex collecto Epilogiſmo nouum Cyclometram falsò aliquo Principio in Antecedentibus vſum, aut formâ abuſum ſyllogiſticâ; neque enim concluſio falſa aliunde proficiſci potuit iuxta certiſſima Logicorum Placita.

Coroll. III.

Conſtat, quod initio aſſerui, vix vllam Geometricam rationem circulum in Quadratum conuertendi hactenus innotuiſſe, vel ad praxim obſeruari poſſe, hac breuiorem aut faciliorem. Quid enim facilius quàm lineæ O R arcui C B I æqualis, determinatio? cum ex diuiſione Quadrantis in quatuor partes æquales, quæ facillima eſt, tota pendeat; vt ex ſuperiori conſtructione apertum eſt. Quam verò accurata ſit hæc methodus ex calculo ſuperiore apertum eſt: quo conſtat peripheriam ſemicirculi colligi huiuſmodi 314144 ex

radio

radio 100 000: ex quo iuxta recentiores geometras statuitur 314159: ita vt differentia tantum sit vnitatum 15. qui numerus continetur in numero 314159 toties, quot sunt in hoc numero 20 944 vnitates. Ita vt, si linea O R diuidatur in partes 21 600, vnicâ tantùm ex his partibus deficere possit, quominus æqualis sit arcui C B I Quadrantis. Quænam igitur geometrica ratio circulum Quadrandi, hac facilior inueniri possit?



Coroll. 4.

Si in eadem figura ducatur recta linea C R: triangulum C O R erit Quadranti O C B I æquale. Nam Rectangulum sub radio C O, & rectâ lineâ æquali semicircumferẽtiæ circuli, ciculo est æquale ex Archim. Ergo rectangulum sub radio C O & recta, quæ sit æqualis dimidiæ circumferentiæ semicirculi, hoc est,

peripheriæ Quadrantis C B I; cui ponitur æqualis linea recta O R, est æquale semicirculo: Ergo semissis illius rectanguli, hoc est, triangulum C O R æqualis erit Quadranti circuli eiusdem.

Coroll. V.

Si Quadratrix linea illa celeberrima intra Quadrantem C O I describeretur; eius basis æqualis proximè foret lineæ I R partiúmque foret 57072, qualium radius O I est 100 000. Ducta etiam recta C R, non tangeret quidem Quadratricem in C, cum recta O R minor sit ostensa tantillò, quàm arcus C B I; ab eo tamen contactu non longè abesset; eamque secaret intra ipsum circulum, cuius radius radij C O duplus foret; transiret per C, & in eo puncto Quadratricem tangeret; ipsáque tangeretur ab eadem C R, sicut & de Quadratrice dictum est. Sed his nunc quidem missis; totum hoc opus claudo duobus maximi momenti Corollariis ex ipso toto collectis.

Corollaria duo in Epilogum ex toto hoc opere deducta

Primum.

Obseruabunt, opinor, Geometræ circuli Tetragonismum olim meditaturi, ex hisce pauculis à me in rem Geometricam collatis: quanti apud ipsos ponderis esse debeat integerrimum & apertissimum Arithmetices iudicium. Quod in suis ratiociniis, vt plurimùm abstrusioribus & longa serie productis nisi consulant: mirum, nisi sibi primùm ipsis,

tum

tum Aliis imponendi periculum incurrant: ut incurrere hactenus (quod vel ex iis constat) non pauci; nec pauciores effugêre. In quibus summus ille Cyclometrarum apex Archimedes præ ceteris commendandus & imitandus videtur: qui huius difficultatis, aliarúmque similium solutionem perscrutans, nihil nisi quod Arithmetices testimonio approbaretur, asseruit unquam. Quem nuper non sine laude secutus est proximè R. P. Antonius Lalouera Societatis nostræ, in subtilissimo illo opere, quod de Tetragonismicis Elementis conscripsit, & è staticâ totum mirâ arte collegit, testatur ipse lapsurum se sæpiùs fuisse: nisi opportunè manum, lucémque præbuisset Arithmetica. Quare quisquis hunc nodum extricandi cupiditate tenebere imposterum: ut fœlicem, quod faxint Superi, exitum operæ sortiaris; aut minimùm quod maximi apud te momenti esse debet, nominis tui existimationem tueri velis: Geometriam sororis Arithmeticæ consortio consilióque destitui nunquam patiare.

Secundum.

Cernitis, ô Geometræ, quorum disputationi traditus est orbis; quam ægrè in alienam figuram illum converti contingat. Cum ab ipsis Matheseos incunabulis tam multi eius Alumni clarissimi, tantâ contentione, tam incassum incubuerint. Vnde tanta difficultas, ut fere impossibilitas censeatur? Negemúsne aliquod, curuum inter & rectum, dari commercium? Haud quaquam. Quam multæ quantitates tam plani quam solidi generis (lineare reticeo) curuum cum recto commutarunt? Quam multis modis Parabola ab Archimede, à Gregorio hoc nostro, ab Aliis Quadraturam su-

bire coacta est? Quot curuilinea in rectilinea conuersa totâ huius operis primâ parte ex Illustrißimo Præsule retuli? nonne & Anguli ipsi curui in rectum commutationem admittunt? In solidis verò nonnè vngula siue cuneus ex Cylindro tam circulari quàm Parabolico abscissus enormi planè ambitu circũscriptus in Parallelepipedum regularissimũ à Gregorio & Lalouera subactus est? Desunt fortasse Principia huius cognitionis propria? (communia enim quî deesse possunt? Neque ea est difficultatis origo. Nihil in rerum natura tam infœcundum (omnium minimè circulus) ex quo singulares quædam & propriæ facultates non efflorescant: ex quibus latentis ipsius naturæ ratio arguatur. Semicirculus, aut alia quæuis circuli portio, grauitatis centro non caret: & definito; definit Quadraturam circuli P. Ioan. de la Faille è Societate nostra, in subtilissimo opere: quod de centro grauitatis partium circuli & Ellipsis edidit. Nemo dubitauerit quin segmentum circuli quodlibet in duas partes vel æqualitatis vel inæqualitatis rationem datam seruantes diuidi poßit. At ea posita diuisione: ponitur statim circuli Tetragonismus. Detur Archimedi recta linea quæ helicẽ eius contingat: nihil aliud ad absolutam circuli Quadraturã desideratur. Detur & mihi linea, quæ pariter Quadratricem in infinitum vltra antiquum eius verticem productam, vt in elementis Geometriæ practicæ docui, quouis in puncto pariter osculetur: nonne ibidem obiter perstrinxi perfici Tetragonismum? Quid plura congeram, cum innumera sint; quibus planum fiat, circulum non carere medijs, quibus deposita circulari figurâ rectilineã induere poßit. Denique nec Artificum tenui industria, aut remissâ contentione, quæ summa semper fuerunt, factum censeri

censeri debet, vt hunc defectum tamdiu passa sit Geometria. Vnde ergo factum? hactenus inde factum ego quidem reor: vnde imposterùm factum iri censeo, vt posteros omnes Geometras lateat eadem cognitio: aliunde scilicet quàm ex ipsius rei naturâ ignorationis huius ratio petenda mihi videtur.

An igitur quia totum hoc, quod sensu percipitur, globosum corpus ad enarrandum supremi opificis gloriam præ cæteris rebus materiæ immersis institutum, eo munere minùs absolutè fungeretur nisi illa ipsa eius figura sphærica omni mutatione superior foret. Sphærica quidem esse debuit, vt scilicet, perfectissima: vt capacißima: vt vnico simplici termino definita; vt principio ac fine carens: vt eandem vndique sui speciem exhibens: vt intra locum in omnem partem mota quasi immota permanens: ita enim Archetypi sui summam perfectionem, immensitatem, æternitatem, vnitatem, immaterialitatem quoquo modo adumbratura erat. Vt verò eiusdem absolutam immutabilitatem referret; quod aptius symbolum ei inuri debuerat, aliud à priuatione facultatis aliã à circulari figurã induendi? An quia fortasse audaces quidem, fœlices tamen illæ Geometrarum mentes; quæ terrestribus aëreisque omnibus radio subactis suo; immensa etiã, profundissimáque spatia arcanáque cælestia adscititiis illis suis oculis præ hactenus vsurpatis ad stuporẽ acutioribus perlustrant omnia: tenuitatis facilè obliuiscerentur suæ; nisi figura illa vnica, quâ nulla apud ipsas tritior, nulla ad operandum magis necessaria, & quæ sæpiùs adhibeatur; nulla, cum aliquod eius vestigium rebus in omnibus creatis, maximis, minimis obseruare liceat, oculis magis obuia: earum

ingenij aciem, ita iubente diuinâ Sapientiâ, ad cæcitatem perstringeret; vigiliásque omnes, & animi contentionem eluderet? Denique, An quia supremus rerum Artifex, dum eas in figuram quoquo modo sphæricam vt ad motum expeditissimam omnes effinxit; simúlque, vt eius permutandæ facultatem omnem, ita & omnem quietis spem præcidit non Geometrarum modò sed mortalium quemque monitum voluit nullis eorum omnium, quæ supremi orbis complexus fouet, quorúmque figura præterit, ei esse vnquam conquiescendum: eámque petendam ciuitatem, quæ extra orbem in Quadro posita æternùm quietura est. Hanc, si sapimus, Geometræ mei, Quadraturam non sine spe eius, diuinâ fauente gratiâ, assequendæ, totâ animi corporísque contentione inquiramus. Valete fauete.

INDEX



INDEX

Fractorum numerorum: qui hoc opere continentur.



CVM fracti numeri duplici constent ordine Characterum: hos propterea non nisi minutiores exhibere potest Typographia, nec nisi cum periculo oculorum aciem vel fugiendi, vel fallendi: cui facile occurretur proposita maioris formæ numerorum fractorum, qui hoc opere continentur, synopsi: quam, cum libuerit, consulas. Quilibet autem quæsitus numerus occurret expeditissimè obseruatis tum paginâ tum exordio lineæ, in quibus numerus quæsitus reperitur. Quod si plures eadem linea contineat: eodem seruato ipsorum ordine omnes hic reponitur.

Pagina 141.

Lineis

Cum his $\frac{1}{2}$

tur, ducta $\frac{1}{2}$

ALB— $\frac{1}{2}$

pars

Pag. 152.

Pag. 153.

$\frac{3}{4}$) produc.

genitum $\frac{3}{96} . \frac{1}{3}$

Pag. 154.

Lineis

esse — $\frac{2}{15}$

segmenti $\frac{1}{240}$

ta partib. $\frac{2}{15}$

ducta $\frac{1}{2} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$.

hæc — $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{24}$ $\frac{1}{384}$

semissis $\frac{1}{768}$

Cylind $\frac{3}{768}$

in minimis $\frac{1}{256}$

Pag. 155.

Lin.

pars $\frac{1}{3840}$

bet ad $\frac{3}{768}$

tandem $\frac{1}{240}$

rectang. $\frac{9}{128}$

VLX $\frac{1}{32}$

$\frac{1}{240}$ prod $\frac{331}{3840}$

reduction. $\frac{331}{3840}$

Pag. 158.

Lineis

diuisa $\frac{1}{2}$

HQ) erit. $\frac{1}{4}$

Pag. 159.

Lin.

ZIZR $\frac{1}{2}$

erit — $\frac{1}{4} . \frac{1}{2}$

Pag. 160.

Pag. 173.

Pag. 174.

AEN $\frac{4}{6}$

Pag. 177.

Lin.

ſiue — $\frac{2}{3}$

triang. $\frac{1}{6}$

le eſt — $\frac{1}{2}$

cum — $\frac{1}{2}$

cta Z X $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$

$\frac{2}{4}$ æquale

$\frac{1}{4}$ Prod.

ſis eſt $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$

Pag. 178.

Lin.

Ergo— $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$

Parall. $\frac{1}{4}$

Z V ſemp. $\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}$ cui

Quod — $\frac{1}{6}$

ne habeb. $\frac{11}{12}$

ergo — $\frac{11}{12}$

Pag. 188.

Lin.

uenti $\frac{2}{15}$ $\frac{331}{1920}$

Prop. $\frac{2}{3}$ $\frac{11}{12}$

In ſchemate huius paginæ.

$\frac{2}{15}.\frac{331}{1920}$ | $\frac{2}{3}.\frac{11}{12}$

Pag. 240.

Lin. addatur $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$

166 $\frac{2}{3}$

numero $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

Pag. 241.

Nunc $\frac{1}{3}$

tabola $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$

ctanguli $\frac{1}{3}$

erit $\frac{2}{3}$

Pag. 243.

Lin.

Parab $\frac{2}{3}$

eius $\frac{1}{3}$

planum $\frac{2}{3}$

Pag. 245.

Lin.

duplum $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

lectus $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{6}$

manebit $\frac{1}{6}$

EFO $\frac{2}{3}$

numerus $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

335 $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{6}$

in tabella

$40\frac{1}{2}$ $653\frac{5}{6}$

$3\frac{1}{6}$ $40\frac{1}{2}$

Pag. 246.

Lin.

A $\frac{243}{6}$ C $\frac{3923}{6}$

B $\frac{19}{6}$ D $\frac{243}{6}$

Pag. 250.

Lin.

Prop. $\frac{1}{3}$

ne $\frac{1}{3}$

Pag. 252.

Lin.

planum $\frac{2}{3}$

siue $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$

dantur $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

huic $\frac{1}{3}$

Errata emendata.

Primæ Partis.

Pag. Linea.

p.17.l.7.datam diuidere datam rationem diuid.p.22.l.4.à fine externam extremam.p.23. In fig. Vbi linea F H ſecat arcum A D, deeſt I p.23. l. 4. punitus punctis. p.26. l.3. Angulum continent Angulum A F H contin. p. 29. l.2. mixtum æquale mixtum A I R æquale. p.35. l.9. F D G F G D p.43.l.2. à fine illo in, L iſto illo in I, iſto p.48.l.3. à fine verbò verò p.64.l.15. diametrum A B. ſemic. diametrum A B ſemicir. p.81. l.12. Ergo duo ſectores Ergo per 13. Prop. duo p.98.l.3.ſegmento A L B ſegmento A L D. p.109.l.2. à fine Chordæ A C Chordæ B C.

Secundæ Partis.

In figura paginæ 5.& in ſcripto ponitur Γ pro γ qui character ſignificat radicem.

Pagina 158. figura paginæ præcedentis repetenda eſt, delenda hic poſita.

Pag.162.In ſcripto ponuntur Græci characteres maiuſculi; cum minuſculos exhibeat figura.

In fig.20.in ſectione lineæ A B cum linea à puncto V deducta deeſt Z.

p.36.l.5.à fine Rationem E F. Productam Rationem E F productam. p. 40. l.3. à fine vt F Conſequens ita F Conſequens. p.49.l.1.habet. Secundum ſchema : habet ſecundum ſchema contin. p.61.l.6.ſi ab aliquo ſi ſint ab aliquo p.64.l.14. habet habent p.91.l.10. immotis immotas p.105.l.2.à fine ſimiliter ſecantis ſimiliter ſecantes p.122.l.10. Augmentatione Argumentatione p.156.l.4.adductus ad ductus p.161. l.2, quæcunque R N quæcunque K N. p.164,l.1,figura β I figura β γ I Z p.164, l.1, à fine β M Λ Θ E B μ λ θ E p.167,l.1. B,Γ,Δ β,γ,δ. p.180, l.13, à fine nota etiam erit.Quid nota etiam erit tertia p.183,l.6.A ad C; item A ad D,& B D A ad C, B ad C: item A ad D,& B ad D. p.192. l.2, Ille Antecedenti ille Antecedens.

p.222.l.5. mixturam mixtarum.p.231,l.4, à fine vtrumque vtrimque p. 233. l.11. à fine E L P S F L P S p.234.l.1, S F O I S F O T p.236.l.2. à fine E T 16 E I I 16 p. 237. l.3. ſiue 45 ſiue 45″ p.239. in tabula V K 25 V K K 25 E T 16 E I I 16 p.243.l.7. à fine 405 405′ p. 255. l. 4. ortum ortam p.260.l.15. ſextum ſextam p.263.l.6. à fine in eo meo p.265. in tabella C A 90′945 C A 90°90′45 p.274 in tabula F ſæpius pro γ p.281.l.4. à fine ductis hanc ductis, hanc p.282.l.3. à fine G ad C G ad H p.287.l.9. ad ſtabiliendam ad ſtabiliendum.

PERMISSIO.

PAVLVS DE BARRY Prouincialis Societatis IESV in Prouincia Lugdunensi, iuxta Priuilegium eidem Societati à Regibus Christianissimis Henrico III. 10. Maij 1583. Henrico IV. 20. Decembris 1606. Ludouico XIII. 14. Februarij 1611. & Ludouico XIV. nunc regnante, 23. Decembris 1650. quo Bibliopolis omnibus prohibetur, ne Libros ab eiusdem Societatis hominibus compositos, absque Superiorum permissione imprimant: Permittit GVILLELMO BARBIER Typographo Regio, vt Librum cui inscriptio est, *Examen Circuli Quadraturæ*, à P. GREG. *A S.* VINCENTIO *propositæ*, *Authore* P. VINCENTIO LEOTAVDO *Societatis* IESV, ad decem proximos annos imprimere, ac liberè diuendere possit. Datum Gratianopoli 20. Aprilis, anni 1654.

PAVLVS DE BARRY.